** مقاله آموزشی **

گرامیان ها و تحققهای بالانس شده و استفاده آنها در تقلیل درجه سیستمها

محمدعلی معصوم نیا *

چکیده

در این مقالهٔ آموزشی ، گرامیان های کنترل پذیری ومشاهده پذیری را موردبررسی قرارداده ، روش محاسبهٔ آنها را ذکرخواهیم کرد . سپس دربارهٔ تحقق های بالانس شده واستفادهٔ آنها درتقلیل درجهٔ سیستمهای خطی ثابت بازمان ، توضیحاتی ارائه خواهیم کرد . درانتها ، حداکثر خطای تقلیل درجه دراین روش را ذکرکرده وبا استفاده ازاین کران بالادربارهٔ چگونگی انتخاب درجهٔ مناسب برای سیستم تقلیل یافته پیشنهاداتی ارائه می کنیم .

مقدمه

یکی ازروشهائی که بوفوردرتجزیه وتحلیل سیستمهای دینامیکی پیچیده موردا ستفاده قرارمی‌گیرد ، تقریب رفتارآنها با مدلهای ساده تر وسیستمهای درجهٔ پائین ترمی‌باشد. پرواضح است که بررسی رفتاریک سیستم پیچیده بمراتب مشکل تراز بررسی رفتارسیستم ساده شدهٔ معادل آن می باشدو باین دلیل تقلیل درجه همواره موردتوجه بوده است .

در این مقالهٔ آموزشی ، یکی ازمهمترین روشهای موجودبرای تقلیل درجهٔ سیستمهای خطی ثابت با زمان با بعدمحدودرا براساس استفاده از

---

* استادیاردانشکدهٔ مهندسی برق ــ دانشگاه صنعتی شریف ــ تهران

نشریه تحقیقاتی فنی ــ مهندسی استقلال ، دانشگاه صنعتی اصفهان ، شماره ۱۰ شهریور ۷۰

[DOR: 20.1001.1.22287698.1370.10.1.4.9]

تحقق های بالانس شده[1]، موردبررسی قرارخواهیم داد [۱]. ازنظرکیفی می‌توان گفت که درا ین روش سعی می‌شود تا با انتخاب مناسب پایه‌های فضای حالت، هریک ازمتغیرهای حالت سیستم را به همان اندازه‌ای که کنترل پذیراست، مشاهده‌پذیرسازیم وسپس با حذف متغیرهای حالتی که کنترل پذیری ومشاهده‌پذیری آنها کم است، تعداد متغیرهای حالت را تقلیل داده ودرنتیجه بعدفضای حالت ودرجه معادلات حالت بیان‌کنندهٔ رفتارسیستم را کاهش دهیم. برای تشخیص جزء کنترل‌پذیرترومشاهده‌پذیرترفضای حالت، مفاهیم گرامیان های[2] کنترل پذیری ومشاهده‌پذیری را معرفی خواهیم کرد. آنگاه تاثیرتغییرپایه‌های فضای حالت را برروی گرامیان ها بررسی کرده وتحقق های بالانس شده را معرفی می‌کنیم. برای مقایسهٔ تقریب‌های مختلف یک سیستم احتیاج به تعریف فاصلهٔ دوسیستم ازیکدیگرخواهیم داشت تا تقریبی را قابل قبول بدانیم که فاصلهٔ آن ازسیستم موردنظردرمقایسه با دیگرتقریب ها تاحدامکان کمتر باشد. با ین دلیل نرم (اندازه) یک سیستم خطی ثابت با زمان راتعریف می‌کنیم وسپس مراحل مختلف تقلیل درجه با استفاده ازتحقق های بالانس شده را برخواهیم شمرد.

گرامیان ها

تحقق زیررادرنظربگیرید:

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}}(t) &= A\underline{x}(t)+B\underline{u}(t) \\ \underline{y}(t) &= C\underline{x}(t) \end{aligned} \qquad (۱)$$

---

1. Balanced Realization 2. Gramians

[DOR: 20.1001.1.22287698.1370.10.1.4.9]

دراینجا $\underline{x}$ بردار حالت با بعد n ، $\underline{u}$ بردار ورودی با بعد m و $\underline{y}$ بردار خروجی با بعد l بوده و ماتریسهای A و B و C نیز دارای ابعاد متناظری می باشند. برای این تحقق، گرامیان دسترس پذیری[1] (کنترل پذیری) را بصورت زیر تعریف میکنند:

$$W_r(0,t_f)=\int_0^{t_f} e^{A\tau} B B^T e^{A^T\tau} d\tau \qquad (۲)$$

می توان نشان داد که این ماتریس برای هر زمان محدود t_f معکوس پذیر است اگر و فقط اگر جفت (B و A) دسترس پذیر (کنترل پذیر) باشد [۲]. حال اگر زمان t_f را به بینهایت میل دهیم و اگر تمام مقادیر ویژه ماتریس A در سمت چپ محور $j\omega$ قرار داشته باشند $(Re[\lambda_i(A)]<0 \ , \ \forall i)$، آنگاه ماتریس $W_r \triangleq W_r(0, \infty)$ حل یکتای معادله لیاپونوف[2]:

$$AW_r + W_r A^T + B B^T=0 \qquad (۳)$$

خواهد بود. برای اثبات این مطلب، با استفاده از تعریف W_r در (۲) داریم [۳]:

$$A\int_0^{\infty} e^{A\tau} BB^T e^{A^T\tau} d\tau + \int_0^{\infty} e^{A\tau} BB^T e^{A^T\tau} A^T d\tau$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{d}{d\tau}[e^{A\tau} BB^T e^{A^T\tau}] d\tau = e^{A\tau} BB^T e^{A^T\tau} \Big|_0^{\infty} \qquad (۴)$$

---

1. Reachability 2. Lyapunov

بعلاوه چون تمامی مقادیرویژهٔ A درسمت چپ محور $j\omega$ قرار دارند ،پس :

$$\left. e^{A\tau} BB^T e^{A^T\tau} \right|_0^\infty = -BB^T \qquad (۵)$$

و W_r در (۳) صدق میکند . توجه‌کنیدکه‌حل معادلهٔ لیاپونف با فرض اینکه‌مقادیرویژهٔ A سمت چپ محور $j\omega$ می‌باشند ، یکتاست . چون اگر W_2 و W_1 دوجواب معادله (۳) باشند ، آنگاه‌داریم :

$$A(W_1-W_2)+(W_1-W_2)A^T = 0 \qquad (۶)$$

پس :

$$\frac{d}{dt}\left[e^{At} (W_1-W_2)e^{A^Tt}\right] = 0 \qquad (۷)$$

بعبارت دیگربرای تمام زمانهای t ترم‌داخل کروشه مقداری ثابت‌است :

$$e^{At} (W_1-W_2) e^{A^Tt} = Constant \qquad (۸)$$

بخصوص رابطهٔ (۸) برای $t=0$ و $t=\infty$ برقرار است وچون مقادیرویژهٔ A سمت چپ محور $j\omega$ می‌باشندپس $W_1 = W_2$ بوده‌وحل معادلهٔ (۳) یکتا خواهدبود . البته می‌توان نشان دادکه‌درحالت کلی معادلهٔ ماتریسی :

$$FX + XG + C = 0 \qquad (۹)$$

یک جوا ب یکتا برای ما تریس مجهول X دا ردا گروفقط ا گرما تریسهای F و G فا قدمقا دیرویژه مشترک با شند [۴] . همینطورا گردا شته با شیم :

$$Re\ [\ \lambda_i\ (F)\ ] + Re\ [\ \lambda_j\ (G)\ ] < 0\ ,\quad \forall\, i,j \qquad (۱۰)$$

آ نگا ه ا ین جوا ب یکتا را می‌توا ن بصـــــورت $X = \int_0^{\infty} e^{Ft}\ C\ e^{Gt}\ dt$ نوشت [۳] .

بعلاوه گرا میا ن دسترس پذیری $W_r\ (0$ و $t_f)$ که در را بطهٔ (۲) تعریف شده ا ست برای هرزما ن t_f حدا قل مثبت نیمه معین می‌با شد چو ن دا ریم :

$$\underline{w}^T\ W_r(0\ و\ t_f)\ \underline{w} = \int_0^{t_f} \underline{z}^T(\tau)\underline{z}(\tau)d\tau > 0 \qquad (۱۱)$$

$$\underline{z}(\tau) = B^T\ e^{A^T\tau}\ \underline{w}$$

وچنا نچه جفت (B و A) دسترس پذیربا شد ، آ نگا ه ما تریـــس $W_r(0$ و $t_f)$ برای تما م زما نهای t_f مثبت معین خوا هد بود .

بهمین منوا ل ، گرا میا ن مشا هده‌پذیری[1] را بصورت زیرتعریـــف می‌کنند :

$$W_o(0,t_f) = \int_0^{t_f} e^{A^T\tau}\ C^TC\ \ e^{A\tau}\ d\tau \qquad (۱۲)$$

ا ین ما تریس نیزبرای تما م زما نهای t_f معکوس پذیرا ست ، ا گروفقط ا گرجفت $(C$ و $A)$ مشا هده‌پذیربا شد . بعلاوه ا گرزما ن t_f را به‌بینهایـــت

1. Observability

میل دهیم و اگرتمام مقادیرویژهٔ ماتریس A درسمت چپ محور $j\omega$ واقع باشند، آنگاه بسادگی می توان نشان دادکه ماتریس $W_o \triangleq W_o(0, \infty)$ حل یکتای معادلهٔ لیاپونف :

$$A^T W_o + W_o A + C^T C = 0 \qquad (۱۳)$$

خواهدبود. چگونگی حل معادلهٔ لیاپونف درمرجع [۵] ارائه شده است با استفاده از برنامهٔ MATLAB نیزمی توان معادلهٔ لیاپونف را بسادگی حل نمود [۶].

درادامه به تعبیرفیزیکی گرامیان ها خواهیم پرداخت . درابتدا فرض کنیدکه بخواهیم حالت سیستم را ازمرکزصفحهٔ حالت ($\underline{x} = \underline{0}$) درزمان $t = -T$ به نقطهٔ $\underline{x} = \underline{x}_0$ درزمان $t = 0$ هدایت نمائیم بگونه ای که انرژی ورودی مینیمم شود. بعبارت دیگرمی خواهیم مسئلهٔ بهینه سازی :

$$\text{minimize} \quad J = \int_{-T}^{0} \underline{u}^T(t)\, \underline{u}(t)\, dt \qquad (۱۴)$$

را با شرایط مرزی زیرحل کنیم :

$$\underline{x}(-T) = \underline{0}\,, \quad \underline{x}(0) = \underline{x}_0$$

البته رابطهٔ بین ورودی وحالت نیزطبق معادله (۱) بوده واین رابطه حکم قیدمسئلهٔ بهینه سازی را دارد. می توان نشان دادکه ورودی بهینه $\underline{u}^*(t)$ با فرض دسترس پذیری بصورت زیربوده [۲]:

$$\underline{u}^*(t) = B^T e^{-A^T t} \left[W_r(0, T) \right]^{-1} \underline{x}_0 \qquad (۱۵)$$

مقدار تابع هزینه بهینه (انرژی مینیمم) برای این ورودی بهینه بصورت

$$J^* = \underline{x}_0^T \, [W_r(0,T)^{-1}] \, \underline{x}_0 \qquad (۱۶)$$

می باشد. البته اگر T را به سمت بینهایت میل دهیم، بافرض اینکه مقادیر ویژه A درسمت چپ محور $j\omega$ واقع باشند، داریم :

$$J^* = \underline{x}_0^T \; W_r^{-1} \; \underline{x}_0 \qquad (۱۷)$$

توجه کنید که اگر $\underline{x}_0$ در امتداد بردار ویژه W_r با مقدار ویژه " کوچک " قرار داشته باشد، آنگاه J^* " بزرگ " خواهد بود و درنتیجه دست یافتن به این حالت مستلزم استفاده از مقدار زیادی انرژی است . پس این قسمت از فضای حالت به سختی دسترس پذیر بوده و یا به عبارت دیگر دسترس پذیری آن کم است . پس نزدیک بودن W_r به تکینگی[1] ضمنا یا نگر نزدیک بودن جفت (B و A) به دسترس نا پذیری است .

بهمین ترتیب می توان تعبیری دیگر برای گرامیان مشاهده پذیری ارائه کرد . تحقق (۱) را درنظرگرفته و فرض کنید ورودی $\underline{u}(t)$ برای $t \geqslant 0$، صفر باشد ، آنگاه واضح است که داریم :

$$\underline{y}(t) = C\, e^{At}\, \underline{x}_0 \quad , \quad t \geqslant 0 \qquad (۱۸)$$

که در اینجا $\underline{x}_0$ حالت اولیه می باشد . انرژی خروجی نیز بصورت زیر است :

$$E^* = \int_0^T \underline{y}^T(t)\underline{y}(t)dt = \underline{x}_0^T \; W_o(0,T)\underline{x}_0 \qquad (۱۹)$$

---

1. Singularity

[DOR: 20.1001.1.22287698.1370.10.1.4.9]

همینطوراگر T را به‌سمت بینهایت میل دهیم ، با فرض پایداری (۱) ، خواهیم داشت :

$$E^* = \underline{x}_0^T \; W_o \; \underline{x}_0 \qquad (۲۰)$$

حال اگر $\underline{x}_0$ درجهت بردار ویژهٔ W_o متناظر با مقدار ویژه " کوچک "باشد ، آنگاه انرژی خروجی E^* " کوچک " خواهد بود و بعبارت دیگر تاثیر این شرایط اولیه درخروجی کم مشاهده‌خواهدشد و از روی خروجی به‌سختی می توان $\underline{x}_0$ را محاسبه‌نمود . پس جزئی از فضای حالت که متناظر با این مقدار ویژهٔ " کوچک " می باشد به‌سختی مشاهده‌پذیرمی باشد و نزدیک بودن W_o به تکینگی نمایانگر نزدیک بودن جفت (A و C) به مشاهده‌ناپذیری است .

در ریاضیات گرامیان بردارهای $\underline{w}_1$, ... , $\underline{w}_n$ را دترمینان ماتریس گرام G (Gram Matrix)[1] بافرم زیرتعریف می کنند :

$$G = \begin{bmatrix} <\underline{w}_1 , \underline{w}_1> & \cdots & <\underline{w}_1 , \underline{w}_n> \\ \vdots & & \vdots \\ <\underline{w}_n , \underline{w}_1> & \cdots & <\underline{w}_n , \underline{w}_n> \end{bmatrix} \qquad (۲۱)$$

$<\underline{w}_i , \underline{w}_j>$ نمایانگرضرب داخلی دوبردار $\underline{w}_i$ و $\underline{w}_j$ است . می توان نشان داد که دترمینان G صفراست اگروفقط اگربردارهای $\underline{w}_1$ و ... و $\underline{w}_n$ وابسته‌خطی باشند . اگرچه بردارهای $\underline{w}_1$ و ... و $\underline{w}_n$ می توانند متعلق به هرفضای برداری باشند ، درمسئلهٔ مشاهده‌پذیری می خواهیم استقلال

خطی ستونهای Ce^{At} را بررسی کنیم ودرحقیقت گرامیان مشاهده پذیری همان ماتریس گرام مربوط به ستونهای مختلف Ce^{At} می باشد. دراینحالت $\underline{W}_i$ ستون i ام ماتریس Ce^{At} است.

تاثیر پایه های فضای برداری برگرامیان ها

دراین قسمت نشان خواهیم دادکه با انتخاب صحیح پایه های فضای برداری میتوان گرامیان های دسترس پذیری ومشاهده پذیری را قطری وبرابر یکدیگرنمود. برای این منظورمتغیرحالت جدید $\underline{z}$ را برحسب متغیرحالت $\underline{x}$ بصورت زیرتعریف کنید:

$$\underline{x} = T\underline{z} \tag{۲۲}$$

با جایگزینی (۲۲) در(۱) داریم :

$$\dot{\underline{z}} = T^{-1} AT \underline{z} + T^{-1} B\underline{u} = \hat{A} \dot{\underline{x}} + \hat{B}\underline{u} \tag{۲۳}$$

$$\underline{y} = CT\underline{z} = \hat{C}\underline{x}$$

حال اگرگرامیان های دسترس پذیری ومشاهده پذیری تحقق (۲۳) را با $\hat{W}_r$ و $\hat{W}_o$ نمایش دهیم، آنگاه، با فرض وقوع مقادیرویژه ٔ A درسمت چپ محور $j\omega$، خواهیم داشت:

$$\hat{W}_r = \int_0^{\infty} e^{\hat{A}\tau} \hat{B}\hat{B}^T e^{\hat{A}^T\tau} d\tau$$

$$= T^{-1}\left(\int_0^{\infty} e^{A\tau} B B^T e^{A^T\tau} d\tau \right)(T^{\tau})^{-1} \tag{۲۴}$$

$$= T^{-1} W_r T^{-T}$$

بطریق مشابه می‌توان نشان داد :

$$\hat{W}_o = T^T W_o T \qquad (۲۵)$$

با توجه به (۲۴) و (۲۵)، واضح است که با انتخاب T مناسب می‌توان خواص ماتریسهای $\hat{W}_r$ و $\hat{W}_o$ را بصورت قابل ملاحظه‌ای تغییر داد و حتی مقادیر ویژهٔ $\hat{W}_r$ و $\hat{W}_o$ را نیز عوض نمود.

نکتهٔ جالبی که باید به آن توجه داشت این است که اگرچه مقادیر ویژهٔ $W_r(W_o)$ و $\hat{W}_r(\hat{W}_o)$ لزوما" یکسان نمی باشند ولی مقادیر ویژهٔ $\hat{W}_r \hat{W}_o$ همانند مقادیر ویژهٔ $W_r W_o$ هستند و با تغییر پایه‌های فضای برداری عوض نمی شوند، زیرا دو ماتریس $\hat{W}_r \hat{W}_o$ و $W_r W_o$ متشابه[1] می باشند :

$$\hat{W}_r \hat{W}_o = T^{-1} W_r T^{-T} T^T W_o T = T^{-1} W_r W_o T \qquad (۲۶)$$

عموما" به جذر مقادیر ویژهٔ ماتریس $W_r W_o$، مقادیر استثنائی هنکل[2] [۸] یا مودهای درجهٔ دوم [۱] گفته می شود. از آنجا که برای هر دو ماتریس دلخواه M و N با ابعاد مناسب، مقادیر ویژهٔ غیرصفر ماتریس‌های MN و NM با یکدیگر برابرند، مقادیر استثنائی هنکل، جذر مقادیر ویژهٔ $W_o W_r$ نیز می باشند. بعلاوه چون تمامی تحقق های مینیمال (هم دسترس پذیر و هم مشاهده‌پذیر) یک تابع تبدیل بوسیلهٔ تبدیل (۲۳) با یکدیگر در ارتباط می باشند[۳]، حاصلضرب گرامیان های مشاهده‌پذیری و دسترس پذیری این تحقق ها متشابه خواهند بود. بنابراین مقادیر استثنائی

---

1. *Similar* 2. *Hankel Singular Values*

هنکل به تحقق بخصوص بستگی نداشته وبه این علت به مقادیر استثنائی هنکل تابع تبدیل نیز معروفند وآنها را با σ_i نمایش داده وبصورت نزولی مرتب می کنند :

$$\sigma_i[G(S)] \triangleq \lambda_i^{\frac{1}{2}}(W_r W_o), i = 1,2,\ldots,n \tag{۲۷}$$

$$\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \ldots \geqslant \sigma_n > 0$$

دراینجا λ_i (F) نمایانگر i امین مقدار ویژهٔ ماتریس F است . عموماً σ_i ها را درماتریس قطری Σ بصورت زیرقرار می دهند :

$$\Sigma \triangleq \begin{bmatrix} \sigma_1 & & 0 \\ & & \\ 0 & & \sigma_n \end{bmatrix} \tag{۲۸}$$

درادامه نشان خواهیم دادکه می توان ماتریس T را بگونه ای انتخاب کردتا :

$$\hat{W}_r = \hat{W}_o = \Sigma , \tag{۲۹}$$

به تحقق ($\hat{C}$،$\hat{B}$،$\hat{A}$) که درآن گرامیان های دسترس پذیری ومشاهده پذیری هردوقطری وبا یکدیگربرابرباشند ، تحقق بالانس شده می گویند [۱]،چون بطورکیفی دراین تحقق هریک ازمتغیرهای حالت به یک اندازه دسترس پذیرومشاهده پذیر می باشد .

چون W_r مثبت معین $(W_r > 0)$ وهمینطور متقارن می باشد ، می توان یک سری بردارهای ویژهٔ متعامد برای آن پیدا کرد . پس ماتریس متعامد V_r وجودخواهدداشت بطوریکه [۹] :

$$V_r^T \; W_r \; V_r = \Lambda_r^2 \qquad (۳۰)$$

دراینجا Λ_r یک ماتریس قطری با المانهای مثبت می‌باشد. حال ماتریس متقارن ومثبت معین P را بصورت زیرتعریف کنید:

$$P = (V_r \; \Lambda_r)^T \; W_o (V_r \; \Lambda_r) \qquad (۳۱)$$

نکتهٔ جالب این است که مقادیرویژهٔ P همان مقادیرویژهٔ $W_r W_o$ می‌باشند چون داریم:

$$\lambda_i(P) = \lambda_i \; (V_r \; \Lambda_r \; \Lambda_r^T \; V_r^T \; W_o) \qquad (۳۲)$$

$$= \lambda_i \; (W_r \; W_o) = \sigma_i^2$$

اگرماتریس مودال P را U بنامیم ، آنگاه:

$$U^T PU = \Sigma^2 = U^T (V_r \; \Lambda_r)^T \; W_o (V_r \; \Lambda_r U) \qquad (۳۳)$$

خواهدشد. حال اگرطرفین رابطهٔ (۳۳) راازراست وازچپ در $\Sigma^{-\frac{1}{2}}$ ضرب کنیم:

$$\Sigma = \Sigma^{-\frac{1}{2}} (V_r \; \Lambda_r \; U)^T \; W_o (V_r \Lambda_r U) \; \Sigma^{-\frac{1}{2}} \qquad (۳۴)$$

بامقایسهٔ (۳۴) و (۲۵) نتیجه می‌گیریم که باانتخاب:

$$T = V_r \; \Lambda_r \; U \, \Sigma^{-\frac{1}{2}} \qquad (۳۵)$$

میتوان گرامیان مشاهده‌پذیری را قطری کرده وبرابر Σ قرارداد. به عبارت دیگر $\hat{W}_o = \Sigma$. برای نشان دادن اینکه $\hat{W}_r = \Sigma$ می باشد رابطهٔ (۳۵) را در (۲۴) جایگزین می کنیم . پس از این عمل داریم :

$$\hat{W}_r = \Sigma^{\frac{1}{2}} \; U^T \; \Lambda_r^{-1} \; V_r^T \; W_r \; V_r \; \Lambda_r^{-1} \; U \, \Sigma^{\frac{1}{2}} = \Sigma \qquad (۳۶)$$

البته روشهای دیگری برای محاسبهٔ ماتریس T وجود دارد که از نظر عددی خواص بسیار بهتری دارند و برای آشنائی با آنها مرجع [۹] مفید است. با استفاده از دستور $BALREAL$ در برنامهٔ $MATLAB$ [۶] نیز می توان تحقق بالانس شدهٔ یک تحقق داده شده را محاسبه کرد. البته این دستور دارای اشکالاتی می باشد که تصحیح شدهٔ آن در ضمیمه آمده است .

اگر ماتریس T را بصورت زیر تعریف کنیم :

$$T = T_o \triangleq V_r \; \Lambda_r \; U \qquad (۳۷)$$

بسادگی می توان نشان داد که $\hat{W}_r = I$ و $\hat{W}_o = \Sigma^2$ می شود. به این دستگاه مختصات بخصوص ، نرمالیزه شده در ورودی[1] گفته می شود و در آن تمامی متغیرهای حالت ، به یک میزان دسترس پذیر می باشند [۱].

همینطور اگر ماتریس T را بصورت زیر تعریف کنیم :

$$T = T_I \triangleq V_r \; \Lambda_r \; U \; \Sigma^{-1} \qquad (۳۸)$$

---

1. Input Normal

[DOR: 20.1001.1.22287698.1370.10.1.4.9]

آنگاه $\hat{W}_o = I$ و $\hat{W}_r = \Sigma^2$ خواهدشد. به این دستگاه مختصات بخصوص، نرمالیزه شده در خروجی[1] گفته می شود و در آن تمام متغیرهای حالت به یک میزان مشاهده پذیر می باشند [۱].

البته مهمترین دستگاه مختصات برای تجزیه و تحلیل سیستمها همان دستگاه مختصات بالانس شده می باشد که در آن گرامیان های مشاهده پذیری و دسترس پذیری هردو قطری و برابر یکدیگر می باشند.

در اینجا ذکر این نکته ضروری است که تبدیل T که در (۳۵) آمده است یکتا نمی باشد چون بطور مثال عناصر هر یک از ستونهای V_r را می توان در ۱- ضرب کرد و ماتریس T به دست آمده با زهم تحقق داده شده را به یک تحقق بالانس شده تبدیل خواهد کرد. البته اگر σ_i ها غیرتکراری باشند، آنگاه تمام T های ممکن از ضرب کردن (۳۵) در یک ماتریس قطری با المانهای ۱ یا ۱- بدست خواهند آمد ولی اگر بعضی از σ_i ها تکراری باشند، آنگاه بینهایت ماتریس T وجود خواهد داشت که یک تحقق داده شده را بالانس می کنند [۸].

نرم یا اندازهٔ یک سیستم

همانگونه که در مقدمه توضیح داده ایم ،برای مقایسهٔ تقریب های مختلف یک سیستم احتیاج به معیار اندازه گیری فاصلهٔ دوسیستم از یکدیگر داریم . بهمین منظور ، ابتدا دو معیار متفاوت برای محاسبهٔ اندازه (یا بزرگی) یک سیستم یا تابع تبدیل آن ارائه خواهیم کرد و سپس فاصلهٔ دو تابع تبدیل را براساس اندازهٔ تفاضل آنها محاسبه خواهیم نمود.

براساس مطالبی که تا کنون ذکر کرده ایم یک نرم (یا اندازه) رایج برای تابع تبدیل گویا ، پایدار و اکیداً " سره[2] $G(S)$، نرم هنکل آن می باشد که آنرا با $\|G(S)\|_H$ نمایش داده و بصورت زیر تعریف می کنند :

---

1. Output Normal 2. Strictly Proper

$$\|G(S)\|_H \triangleq \sigma_1 \qquad (۳۹)$$

که‌درآن σ_1 بزرگترین مقدار استثنائی هنکل $G(S)$ است (تابع تبدیلی اکیدا " سره می باشدکه برای آن داشته باشیم :

$$\lim_{S \longrightarrow \infty} G(S)=0 \qquad (۴۰)$$

یا بعبارت دیگرورودی این سیستمها نباید مستقیما " برروی خروجی آنها اثرگذارد) . می توان نشان دادکه نرم هنکل $G(S)$ را با رابطهٔ زیرنیز می توان تعریف نمود [۸] :

$$\|G(S)\|_H = \sup_{\underline{u}(t)\in L_2(-\infty,0)} \frac{\|\underline{y}(t)\| L_2(0,\infty)}{\|\underline{u}(t)\| L_2(-\infty,0)} \qquad (۴۱)$$

دراینجا sup نمایانگرسوپرمم[1] (یا ماکزیمم) می باشدو $L_2(-T_1$ و $T_2)$ نمایانگرتمام توابع $\underline{r}(t)$ است‌که برای آنها $\int_{-T_1}^{T_2} \underline{r}^T(t)\underline{r}(t)\,dt$ محدوداست . چون ورودی $\underline{u}(t)$ برای $t\geqslant 0$ ، صفرفرض شده ودررابطهٔ (۴۱) ، خروجی $\underline{y}(t)$ فقط برای $t>0$ موردنظرمی باشد ، پس $\underline{y}(t)$ فقط به حالت اولیهٔ $\underline{x}_0$ بستگی داشته وبا استفاده از تعریف گرامیان دسترس‌پذیری درمسئلهٔ مینیمم انرژی خواهیم داشت :

---

1. Supremum

$$\| G(S)\|_H = \sup_{\underline{x}_0 \neq \underline{0}} \frac{(\underline{x}_0^T \; W_0 \; \underline{x}_0)^{\frac{1}{2}}}{(\underline{x}_0^T \; W_r^{-1} \; \underline{x}_0)^{\frac{1}{2}}} \tag{۴۲}$$

همینطوراگر فاکتورکلسکی[1] ماتریس W_r^{-1} را با L نمایش دهیم

$$L^T L = W_r^{-1} \tag{۴۳}$$

آنگاه خواهیم داشت :

$$\| G(S)\|_H = \sup_{\underline{x}_0 \neq \underline{0}} \left[\frac{\underline{x}_0^T \, W_0 \; \underline{x}_0}{\underline{x}_0^T \, L^T L \; \underline{x}_0} \right]^{\frac{1}{2}} \tag{۴۴}$$

$$= \sup_{\underline{y}_0 \neq \underline{0}} \left[\frac{\underline{y}_0^T \; L^{-T} \; W_0 \; L^{-1} \; \underline{y}_0}{\underline{y}_0^T \; \underline{y}_0} \right]^{\frac{1}{2}} , \; \underline{y}_0 \triangleq L\underline{x}_0$$

$$= \lambda^{\frac{1}{2}}_{max} \; (L^{-T} \; W_0 \; L^{-1})$$

$$= \lambda^{\frac{1}{2}}_{max} \; (L^{-1} \; L^{-T} \; W_0 \;) = \sigma_1$$

---

1. Cholesky

دراینجا $\lambda_{max}(F)$ نمایانگر بزرگترین مقدار ویژهٔ ماتریس F می باشد.

البته تعریف نرم هنکل کمی غیرطبیعی بنظر می رسد ولی بسادگی می توان نشان داد که تمام خواص یک تابع نرم را دارا می باشد. درادامه نرم دیگری را تعریف خواهیم کرد که مفهوم سیستمی بسیار واضحی داشته و از آن کرارا " استفاده خواهد شد.

فرض کنید سیستم تک ورودی ــ تک خروجی پایداری با تابع تبدیل گویا و سره[1] $g(s)$ داده شده باشد. نرم بینهایت $g(s)$ را با $\|g(s)\|_\infty$ نمایش داده و آنرا بصورت زیر تعریف می کنند [۱۰]:

$$\| g(s)\|_\infty \triangleq \sup_{s\varepsilon C_+} |g(s)| \qquad (۴۵)$$

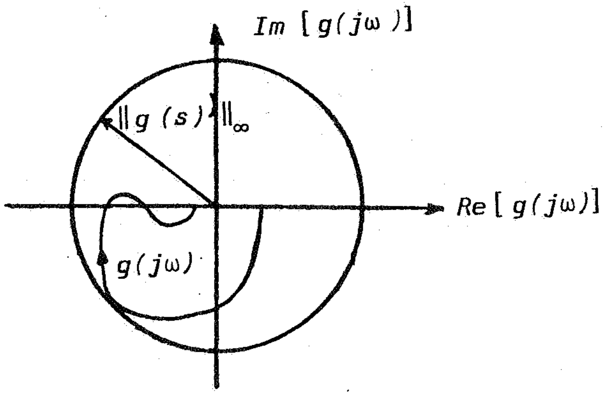
دراینجا C_+ نمایانگر تمام نقاط صفحهٔ مختلط واقع درسمت راست یا روی محور $j\omega$ است. چون $g(s)$ درنقاط C_+ تحلیلی می باشد، با استفاده از قضیهٔ اصل حداکثر قدر مطلق[2] [۱۱]، می دانیم که ماکزیمم $|g(s)|$ برای $s\varepsilon C_+$ برروی محور $j\omega$ اتفاق خواهد افتاد، یابعبارت دیگر:

$$\| g(s)\|_\infty = \sup_{\omega\varepsilon(-\infty,\infty)} |g(j\omega)| \qquad (۴۶)$$

ودرحقیقت نرم بینهایت شعاع کوچکترین دایره ای است که دیاگرام نایکوئیست یک سیستم را دربرمی گیرد (شکل ۱).

---

1. Proper 2. Maximum Modulus Principle



شکل ۱ـ دیاگرام نایکوئیست ونرم‌بینهایت یک سیستم نمونه

برای سیستمهای چندمتغیره که‌تمامی قطبهای آنها درسمت چپ‌محور قرارداشته‌وسره می‌باشند ، نرم بینهایت را بصورت زیرتعریف‌می‌کنیم :

$$\| G(s)\|_\infty \triangleq \sup_{s\varepsilon C_+} \bar{\sigma}(G(s)) \tag{۴۷}$$

که‌درآن نمایش $\bar{\sigma}(F)$، بمعنای بزرگترین مقدارا ستثنائی ماتریس مختلط F بوده ، وبصورت زیرتعریف می شود :

$$\bar{\sigma}(F) = \lambda_{max}^{\frac{1}{2}} (F^H F) \tag{۴۸}$$

دراینجا H نمایانگر هرمیشن[1] یک ماتریس می باشد. برای هرمقدار مختلط s، ماتریس $G(s)$ یک ماتریس مختلط بوده، $\bar{\sigma}\,(G(s))$ تابعی از متغیرمختلط s خواهدبود. می توان نشان داد که مقدار ماکزیمم $\bar{\sigma}\,(G(s))$ برای $s \epsilon C_+$ برروی محور $j\omega$ اتفاق می افتد [۱۰]، یا بعبارت دیگر:

$$\| G(s) \|_{\infty} = \sup_{\omega \epsilon (-\infty, \infty)} \bar{\sigma}\,(G(j\omega)) \tag{۴۹}$$

حال که با مفهوم اندازهٔ یک سیستم آشنا شده ایم، بسادگی می توان فاصلهٔ دوسیستم را ازیکدیگر تعریف کرد. فرض کنید دوسیستم m ورودی و تک خروجی پایدار با توابع تبدیل $G_1(s)$ و $G_2(s)$ داده شده باشند، آنگاه تفاضل $G_2(s) - G_1(s)$ نیزسیستمی پایدارخواهدبود و می توان فاصلهٔ دو سیستم $G_1(s)$ و $G_2(s)$ را اندازهٔ سیستم تفاضل $G_2(s) - G_1(s)$ تعریف نمود. بطورمثال فاصلهٔ دوسیستم $G_1(s)$ و $G_2(s)$ برحسب نرم بینهایت به صورت زیراست:

$$d(G_2(s), G_1(s)) \triangleq \| G_2(s) - G_1(s) \|_{\infty} \tag{۵۰}$$

درقسمت بعد، ازاین معیاربرای محاسبهٔ فاصلهٔ یک سیستم وتقریب آن استفاده کرده، دربارهٔ چگونگی استفاده ازتحقق های بالانس شده در تقلیل درجهٔ سیستمها صحبت خواهیم کرد.

---

1. Hermition

[DOR: 20.1001.1.22287698.1370.10.1.4.9]

تقلیل درجه براساس تحقق های بالانس شده

فرض کنیدکه سیستم m ورودی وتک خروجی خطی ثابت با زمان پایدار با تابع تبدیل اکیدا "سره" $G(s)$ داده شده باشد ومعادلات حالت (۱) تحققی مینیمال وبالانس شده برای این سیستم باشد. (اگر تحقق مینیمالی راکه دراختیار داریدبالانس نمی باشدبا انتخاب پایه های جدید برای فضای حالت وماتریس T (رابطهٔ (۳۵)) معادلات حالت را بالانس نمائید). همینطور r مؤلفهٔ اول بردار حالت را $\underline{x}_1$ وباقی مؤلفه های آنرا $\underline{x}_2$ نام گذاری کرده ومعادلات حالت (۱) را بصورت زیربازنویسی کنید :

$$\begin{array}{r} r\ \text{سطر} \\ \\ n-r\ \text{سطر} \end{array}\begin{bmatrix} \dot{\underline{x}}_1 \\ --- \\ \dot{\underline{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{ستون}\ r & \text{ستون}\ n-r \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right] \end{array} \begin{bmatrix} \underline{x}_1 \\ --- \\ \underline{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ --- \\ B_2 \end{bmatrix} \underline{u} \qquad (۵۱)$$

$$\underline{y} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{ستون}\ r & \text{ستون}\ n-r \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|c} C_1 & C_2 \end{array}\right] \end{array} \begin{bmatrix} \underline{x}_1 \\ \\ \underline{x}_2 \end{bmatrix}$$

گرامیان های دسترس پذیری ومشاهده پذیری این تحقق راکه بایکدیگر برابر ومساوی Σ می باشد، مطابق بردار حالت بصورت زیرتفکیک می کنیم :

$$\Sigma = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} r\ \text{ستون} & n-r\ \text{ستون} \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|c} \Sigma_1 & 0 \\ \hline 0 & \Sigma_2 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} r\ \text{سطر} \\ n-r\ \text{سطر} \end{array} \qquad (۵۲)$$

$$\Sigma_1 = diag\ (\sigma_1, \ldots, \sigma_r) \quad , \qquad \Sigma_2 = diag\ (\sigma_{r+1}, \ldots, \sigma_n)$$

نکتهٔ جالب این است که اگر جزء $\underline{x}_2$ از بردار حالت را بکلی حذف کرده وتحقق :

$$\dot{\underline{z}} = A_{11}\ \underline{z} + B_1\ \underline{u} \qquad (۵۳)$$

$$\underline{y} = C_1\ \underline{z}$$

را درنظربگیریم ، آنگاه این تحقق با لانس شده بوده وگرامیان مشاهده پذیری ودسترس پذیری آن هردو Σ_1 خواهدبود. این رابطه را می توان بسادگی با جایگزینی (۵۱)و(۵۲) درمعادلات لیاپونف (۳۱ و ۱۳) نتیجه گرفت . همینطوراگر $\sigma_r > \sigma_{r+1}$ باشد، آنگاه تمامی مقادیرویژهٔ A_{11} در سمت چپ محور $j\omega$ قراردارند [۸]، یعنی :

$$Re\ \left[\lambda_i\ (A_{11})\right] < 0 \quad , \qquad i = 1, \ldots, r \qquad (۵۴)$$

بعبارت دیگرتحقق (۵۳) خودنیزپایدارمجانبی خواهدبود وبعلاوه این تحقق هم دسترس پذیروهم مشاهده‌پذیراست . نکتهٔ بسیارجالب دیگر این است که فاصلهٔ دوتحقق (۵۳)و (۵۱) همواره درنامساوی زیر

صدق می کند [۸].

$$\| C(sI-A)^{-1} B - C_1 (sI-A_{11})^{-1} B_1 \|_\infty \leqslant 2(\sigma_{r+1} + \dots + \sigma_n) = 2trace(\Sigma_2) \quad (۵۵)$$

پس اگر مقدار $2trace(\Sigma_2)$ درسمت راست رابطهٔ (۵۵) کوچک باشد، آنگاه تحقق (۵۳) با درجه r تقریب خوبی برای تحقق (۵۱) با درجه n خواهد بود. همینطور در [۸] نشان داده شده است که تمام تقریب های درجهٔ r ممکن برای (۵۱) حداقل خطایی برابر σ_{r+1} خواهند داشت یا بعبارت دیگر:

$$\| C(sI-A)^{-1} B - H(s) \|_\infty \geqslant \sigma_{r+1} \quad (۵۶)$$

که در اینجا $H(s)$، هر تابع تبدیل سره پایدار داده شده با درجهٔ مک میلان[1] r است. عموما " در رابطهٔ (۵۶) تساوی برقرار نمی باشد و مقدار خطا عموما " بمراتب از σ_{r+1} بیشتر است [۸]. حال از مقایسهٔ σ_{r+1} و $2trace(\Sigma_2)$ می توان نتیجه گرفت که خطای تقلیل مرتبه با استفاده از تحقق بالانس شده تا چه حد قابل قبول است.

کرانی که برای خطا در (۵۵) مشخص شده، مطلق است. در بعضی مواقع، محاسبه نسبت خطا به کمیت تقریب زده شده مطلوب می باشد. بعبارت دیگر می خواهیم نسبت:

$$\frac{\| C(sI-A)^{-1} B - C_1 (sI-A_{11})^{-1} B_1 \|_\infty}{\| C(sI-A)^{-1} B \|_\infty} \quad (۵۷)$$

---

1. Macmillan

را محاسبه‌کرده ویا کرانی برای آن پیدا کنیم . خوشبختانه اینکار بسادگی قابل انجام است و می توان نشان داد که برای تابع تبدیل پایدار $G(s)$، نرم هنکل هیچگاه از نرم بینهایت بزرگتر نبوده و نرم بینهایت نیز از دو برابر مجموع مقادیر استثنائی هنکل بزرگتر نمی باشد :[۸]

$$\| C(sI-A)^{-1} B \|_H = \sigma_1 \leqslant \| C(sI-A)^{-1} B \|_\infty \leqslant 2trace(\Sigma) \qquad (۵۸)$$

با استفاده از (۵۸) و (۵۵) :

$$\frac{\| C(sI-A)^{-1} B - C_1(sI-A_{11})^{-1} B_1 \|_\infty}{\| C(sI-A)^{-1} B \|_\infty} \leqslant \frac{2trace(\Sigma_2)}{\sigma_1} \qquad (۵۹)$$

توجه کنید که روابط (۵۵)، (۵۶) و (۵۹) می توانند در انتخاب درجهٔ r مناسب برای تقلیل درجهٔ سیستم مورد استفاده قرار گیرند. در ابتدای کار عموما" درجه تقریبی سیستم موردنظر معلوم نمی باشد ولی با توجه به (۵۶) تمامی تقریب های درجهٔ r، حداقل خطایی برابر σ_{r+1} خواهند داشت و r را باید بگونه ای انتخاب کنیم تا سمت راست روابط (۵۵) و (۵۹) مقادیری کوچک اختیار کنند. البته در بعضی موارد تمامی σ_i ها بقدری به یکدیگر نزدیک میباشند که تقریب سیستم با یک سیستم درجهٔ پایین تر همواره خطای قابل ملاحظه ای پدید خواهد آورد.

اگر تابع تبدیل موردنظر پایدار و سره بوده ولی اکیدا" سره نباشد، آنگاه تحقق آن دارای جزء مستقیم ورودی وبطور مثال بصورت زیر خواهد بود :

$$\dot{\underline{x}} = A\underline{x} + B\underline{u} \tag{۶۰}$$

$$\underline{y} = C\underline{x} + D\underline{u} \longrightarrow \text{جزء مستقیم}$$

دراینجالت نیزمی توان ازروشی که شرح آن رفت استفاده کرد. برای این منظورکافی است که جزء اکیداً سره تحقق یعنی $C(sI-A)^{-1}B$ را با $C_1(sI-A_{11})^{-1}B_1$ تقریب زده وسپس جزء مستقیم را به حاصل اضافه نمود. بعبارت دیگرتقریب درجهٔ r سیستم (۶۰) بصورت $C_1(sI-A_{11})^{-1}B_1+D$ می باشد.

درمرجع [۱۲] روش بسیارمناسبی برای محاسبهٔ تحققی که لزوماً "بالانس شده" نمی باشد ولی تابع تبدیلی برابرتحقق تقلیل یافتهٔ (۵۳) دارد، ارائه شده است. این روش دارای خواص بسیارخوب عددی بوده ودرمسائل پیچیدهٔ با درجهٔ بالا می تواند مورداستفاده قرارگیرد. درادامه برای روشن شدن مطالب وچگونگی استفاده ازتحقق بالانس شده درتقلیل درجه به ذکریک مثال خواهیم پرداخت.

مثال

دراین مثال با استفاده ازتحقق های بالانش شده، تقریب مناسبی برای تابع تبدیل پایدار

$$g(s) = \frac{200(s+2)(s+0.8)}{(s+0.9)(s+4)(s^2+6s+50)} \tag{۶۱}$$

بدست خواهیم آورد. یک تحقق دسترس پذیرومشاهده پذیربرای $g(s)$ به صورت زیراست:

(۶۲)

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} -10.9 & -83 & -266.6 & -180 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 200 & 560 & 320 \end{bmatrix} \underline{x}$$

با استفاده از دستور BALREAL دربرنامه MATLAB [۶]، یک ماتریس T بالانس کننده برای این تحقق به فرم

$$T = \begin{bmatrix} 0.0394 & -0.1754 & 0.1963 & 0.0609 \\ 0.0156 & 0.0005 & -0.0222 & -0.0243 \\ 0.0006 & 0.0041 & 0.0023 & 0.0184 \\ -0.0004 & 0.0007 & 0.0035 & -0.0178 \end{bmatrix} \qquad (۶۳)$$

وتحقق بالانس شده مربوطه بصورت زیرخواهدبود :

$$\dot{\underline{z}} = \begin{bmatrix} -1.9095 & -6.7590 & 2.6865 & 0.2615 \\ 6.7590 & -2.1290 & 2.6964 & 0.3634 \\ -2.6865 & 2.6964 & -5.6044 & -1.1782 \\ -0.2615 & 0.3634 & -1.1782 & -1.2571 \end{bmatrix} \underline{z} + \begin{bmatrix} 3.3122 \\ -2.6064 \\ 2.0314 \\ 0.2252 \end{bmatrix} u \qquad (۶۴)$$

[DOR: 20.1001.1.22287698.1370.10.1.4.9]

$$y = \begin{bmatrix} 3.3122 & 2.6064 & -2.0314 & -0.2252 \end{bmatrix} z$$

گرامیان های دسترس پذیری ومشاهده پذیری این تحقق نیزبصورت زیر می باشند :

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 2.8726 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5954 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3681 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0202 \end{bmatrix} \qquad (۶۵)$$

با توجه به (۵۸) ، نرم بینهایت $g(s)$ از 9.7126 بیشترنبوده واز 2.8726 نیزکمترنخواهدبود. دیاگرام برداندازهٔ $g(j\omega)$ درشکل (۲) رسم شده است واین مقادیربا استفاده ازاین دیاگرام قابل تأییداست ، زیرا داریم :

$$\| g(j\omega) \|_{\infty} \simeq 4.5309 \qquad (۶۶)$$

همینطوربا توجه به المان های قطراصلی Σ میدانیم که حداقل خطای ممکن درتقریب $g(s)$ با یک سیستم درجهٔ سوم برابر $\sigma_4 = 0.0202$ ، وبا یک سیستم درجهٔ دوم برابر $\sigma_3 = 0.3681$ است. البته با توجه به Σ تمام تقریب های درجهٔ اول ممکن برای $g(s)$ خطای قابل ملاحظه‌ای (اقلاً 1.5954) بوجودآورده وقابل قبول نخواهندبود.

با توجه به تحقق بالانس شده (۶۴) ، یک تقریب درجهٔ سوم قابل‌قبول با حذف متغیرحالت چهارم بدست خواهدآمدکه تابع تبدیل آن بصورت :

$$g_3(s) = \frac{0.05073\ (s+1.6709)(s+3912.0)}{(s+3.6072)(s^2+6.0356\ s+ 50.5575\ )} \quad (۶۷)$$

می باشد. دیاگرام بردانداز هٔ $g_3(j\omega)$ واندازهٔ خطای $g(j\omega)-g_3(j\omega)$ درشکل (۲) رسم شده اندوواضح است که درمحدودهٔ فرکانسی نمایش داده شده، $g_3(s)$ تقریب بسیارخوبی برای $g(s)$ است. با استفاده از (۵۵) داریم :

$$\| g(s)-g_3(s)\|_\infty \leqslant 0.0404 \quad (۶۸)$$

وبا توجه به شکل ۲ نرم بینهایت خطا به حد بالای 0.0404 بسیار نزدیک می باشد.

همینطوراگرمتغیرهای حالت سوم وچهارم تحقق (۶۴) را حذف کنیم، آنگاه تحقق یک سیستم درجهٔ دوم بدست آمده وتابع تبدیل آن نیز به صورت زیرخواهد بود :

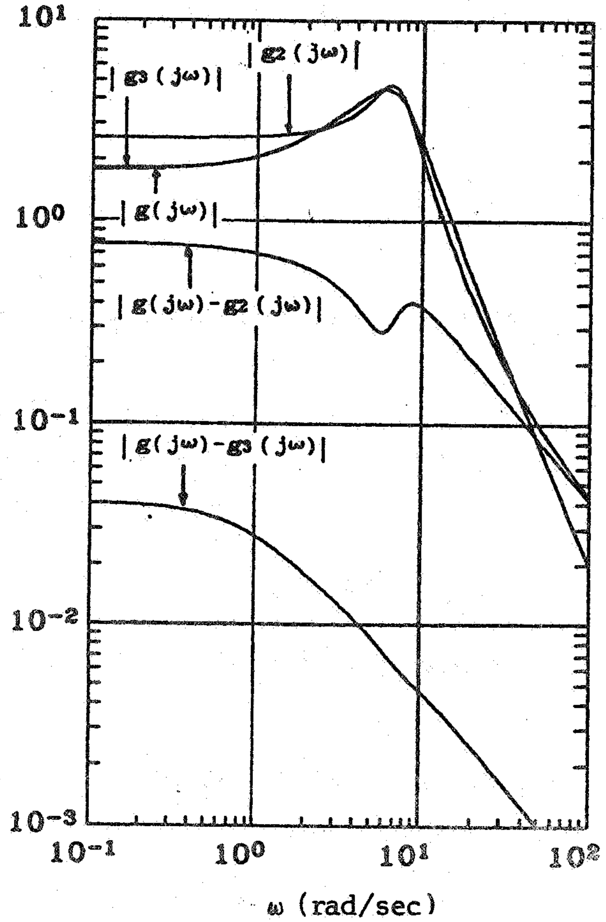
$$g_2(s) = \frac{4.1772(s+30.423)}{s^2+ 4.0385\ s\ +\ 49.7496} \quad (۶۹)$$

دیاگرام بردانداز هٔ $g_2(j\omega)$ واندازهٔ خطای $g(j\omega)-g_2(j\omega)$ نیزدر شکل ۲ رسم شده اندوبا استفاده از (۵۵) داریم :

$$\|g(s)-g_2(s)\|_\infty \leqslant\ 0.7766 \quad (۷۰)$$

با توجه به این شکل ، واضح است که نرم بینهایت خطا به حد بالای 0.7766 نزدیک می باشد و رابطهٔ (۵۵) بخوبی اندازهٔ خطا را پیش بینی کرده است .

در این مسئله بنظر می رسد که $g_3(s)$ یک تقریب مناسب برای $g(s)$ است ، درحالیکه تقریب $g(s)$ با $g_2(s)$ خطای به مراتب بیشتری دارد . البته با توجه به مقادیر قطر اصلی Σ این مطلب از ابتدا قابل پیش بینی بود.



شکل (۲)ـ پاسخ فرکانسی $g(s)$ وتقریب های آن

البته تقلیل درجه با استفاده از تحقق های با لانس شده فقط یکی از روشهای نوین موجود است وروشهای متعدد دیگری برای این منظور وجود دارند. بطور نمونه یک سیستم پایدار وسره $G(s)$ با درجهٔ n را درنظر بگیرید، آنگاه برای تقریب $G(s)$ با یک سیستم درجهٔ r پایدار می توان مسئلهٔ بهینه سازی زیر را حل نمود:

$$\underset{\hat{G}(s)}{minimize} \| G(s)-\hat{G}(s)\|_{\infty} \quad (r = \text{درجهٔ } \hat{G}(s)) \tag{۷۱}$$

البته حل این مسئله مشکل می باشد [۱۳] وروش تقلیل درجه ای که در اینجا ارائه شده درحقیقت یک حل تقریبی (Suboptimal) برای مسئلهٔ ذکر شده است. نکتهٔ مهم دیگری که باید به آن توجه کنیم، تفاوت اهمیت خطا در فرکانس های مختلف می باشد. عموما" خطا هائی که در فرکانسهای پایین در طی تقلیل درجه بوجود می آیند بسیار مهمتر از خطا های فرکانس بالا می باشند. برای درنظرگرفتن اهمیت فرکانسهای مختلف می توان وزنهٔ فرکانسی مناسبی به صورت $W(s)$ انتخاب کرد که دارای اندازه ای بزرگ در فرکانسهای پایین و اندازه ای کوچک در فرکانسهای بالا باشد وسپس مسئلهٔ بهینه سازی زیر را حل نمود [۱۳]:

$$\underset{\hat{G}(s)}{minimize} \| (G(s)-\hat{G}(s)) W(s) \|_{\infty} \quad (r = \text{درجهٔ } \hat{G}(s)) \tag{۷۲}$$

درتقلیل درجه با استفاده از تحقق های با لانس شده نیز می توان وزنه های فرکانسی مناسبی را درنظرگرفت. برای آشنایی با این روش

می توانیدبه مرجع [۱۳] مراجعه کنید. مزیت استفاده از تحقق های بالانس شده، سادگی نسبی انجام محاسبات دربدست آوردن سیستم درجهٔ پائین‌تر می باشدوبه این دلیل بوفورمورداستفاده قرار می گیرد.

البته روش دیگری که اخیرا" با موفقیت بسیار روبرو بوده است، تقلیل درجه با استفاده از نرم هنکل می باشد. دراین روش برای یک سیستم پایدار واکیدا" سره $G(s)$ با درجهٔ n می خواهیم سیستم پایدار $\hat{G}(s)$ با درجهٔ r را بگونه‌ای پیدا کنیم تا تابع هزینه زیرکمینه‌شود:

$$J = \| G(s) - \hat{G}(s) \|_H \tag{۷۳}$$

گلاور[1] این مسئله‌را بصورت کامل حل کرده است ونشان داده است که مقدار مینیمم تابع هزینه (۷۳) برابر σ_{r+1} است [۸]. توجه‌کنیدکه نرم استفاده‌شده‌در (۷۳) نرم هنکل بوده‌ونرم بینهایت نمی باشد. بعلاوه گلاورنشان داده است که‌برای تقریب بهینه‌هنکل $G(s)$، می توان‌ماتریس ثابت D را بگونه‌ای یافت که:

$$\| G(s) - (G(s)+D) \|_\infty \leqslant \sigma_{r+1} + \dots + \sigma_n \tag{۷۴}$$

با توجه‌به این رابطه، تقریب هنکل عموما" خطای کمتری از تقریب حاصل از تحقق های بالانس شده‌دارد. البته‌توجه‌کنیدکه‌دراینجا تقریب $G(s)$ بصورت $\hat{G}(s)+D$ می باشدکه‌لزوما" اکیدا" سره‌نخواهدبوددرحالیکه درتقلیل درجه‌با استفاده‌از تحقق های بالانس شده‌اگرسیستم اکیدا" سره باشد، آنگاه‌تقریب آن نیزاکیدا" سره‌خواهدبود. بعلاوه‌مراحل محاسبات تقریب هنکل بمراتب پیچیده‌ترازتقریب براساس‌تحقق‌های بالانس‌شده می باشد.

---

1. Glover

نتیجه‌گیری

دراین مقاله آموزشی ، یکی ازروشهای بسیار رایج وموفق در تقلیل درجهٔ سیستمهای خطی ثابت با زمان را که براساس تحقق های بالانس شده استوار است ، به تفصیل موردبررسی قرار داده ومزایا ومحدودیت های آنرا برشمردیم .

درسرتاسراین مقاله تنها درباره تقلیل درجهٔ سیستمهای پایدار صحبت کردیم . البته می‌توان یک سیستم ناپایدار داده شده را به دوجزء پایدار $G_s(s)$ وکاملاً ناپایدار $G_u(s)$ تفکیک کرده ، سپس با استفاده ازروشهای ارائه‌شده جزء پایدار $G_s(s)$ را با یک سیستم درجهٔ پایین تر تقریب زده وحاصل را به $G_u(s)$ اضافه کنیم . البته درروشهای دیگر[۱۴]، سیستم داده‌شده را بصورت کسردوسیستم پایدار نوشته (این عمل همواره امکان پذیراست)وسپس این دوسیستم پایدار را با یکی ازروشهای مطرح شده دراینجا تقلیل درجه می دهندوسپس تقریب نهایی را بدست می آورند.

یکی ازکاربردهای اساسی تقلیل درجه درطراحی کنترل کننده های با درجهٔ پایین است چون کنترل کننده هائی که با استفاده ازروشهای نوین طراحی می شوندعموماً " درجه‌ای برابربا درجهٔ سیستم تحت‌کنترل خوددا شته ونسبتاً " پیچیده می باشند. با استفاده ازروشهای تقلیل می توان این کنترل کننده‌ها را با یک کنترل کنندهٔ درجهٔ پایین مناسب تقریب زد. درمرجع [۱۳]روشهای مختلفی برای تقلیل درجهٔ کنترل کننده موردبررسی قرارگرفته است . البته درتقلیل درجهٔ‌کنترل کننده باید به نکات بسیارمهمی ازقبیل پایداری سیستم حلقه‌بسته‌که ممکن است درطی تقریب کنترل کننده ازدست برودتوجه خاصی داشته و بویژه برروی استفاده ازوزنه‌های فرکانسی مناسب درطی مراحل تقلیل درجه تأکیدداشت .

[DOR: 20.1001.1.22287698.1370.10.1.4.9]

ضمیمه

در دستور *BALREAL* در برنامهٔ *MATLAB* [۶]، مقادیر استثنائی هنکل بصورت نزولی مرتب نشده و در نتیجه عمل تقلیل درجه از روی تحقق محاسبه شده به سهولت انجام نمی پذیرد. بعلاوه بخاطر گرد شدن اعداد در طی انجام محاسبات، ماتریس هایی که از نظر تئوری متقارن می باشند، در طی محاسبات تقارن خود را از دست داده و در نتیجه ممکن است مقادیر ویژهٔ محاسبه شدهٔ آنها مختلط شوند. برای پرهیز از این مسائل، این دستور به صورت زیر تصحیح شده است. البته برای محاسبه تحقق های بالانس شده و تقلیل درجه با استفاده از آنها برای سیستمهای با درجهٔ بالا بهتر است از الگوریتمهای پیشنهادی [۹] و [~~۷~~ ۱۲] استفاده شود.

```
function [ab,bb,cb,m,T] = balreal(a,b,c)
%  BALREAL  Balanced state-space realization and model reduction.
%  [Ab,Bb,Cb] = BALREAL(A,B,C) returns a balanced state-space
%  realization of the system (A,B,C).
%  [Ab,Bb,Cb,m,T] = BALREAL(A,B,C) also returns a vector m
%  containing the diagonal of the gramian of the balanced
%  realization, and matrix T, the similarity transformation
%  used to convert (A,B,C) to (Ab,Bb,Cb).  If the system (A,B,C)
%  is normalized properly, small elements in gramian m indicate
%  states that can be removed to reduce the model to lower order.

%       J.N. Little 3-6-86
%       Copyright (c) 1986 by the MathWorks, Inc.

Gc = gram(a,b);    % Compute the reachability gramian
Go = gram(a',c');  % Compute the observability gramian
R = chol(Gc);
RGR = R*Go*R';
RGR = tril(RGR) + tril(RGR,-1)';  % Make RGR exactly symmetric.
[V,D] = eig(RGR);
m=diag(real(D)).^(.5);
T = R'*V*diag(m.^(-.5));
[m index]=sort(-m);  % Sort the diagonal elements of the gramian
m=-m;
T=T(:,index);
ab = T\a*T;  % Compute the balanced realization
bb = T\b;
cb = c*T;
```

مراجع

1. Moore, B., " Principal Component Analysis in Linear Systems: Controllability, Observability, and Model Reduction", IEEE TAC, Vol. 26, No. 1, pp. 17-31, Feb 1981.

2. Luenberger, D., Introduction to Dynamic Systems, Wiley, 1979.

3. Kailath, T., Linear Systems, Prentice-Hall, 1980.

4. Gontmacher, Matrix Theory, Vol. I, Chelsea, 1977.

5. Hammarling, " Numerical Solution of the Stable, Non-negative Definite Lyapunov Equation", IMA Journal of Numerical Analysis, Vol. 2, pp. 303-323, 1982.

6. MATLAB Software, The MATHWORKS Inc., 21 Elliot Street, South Natick, MA 01760, U.S.A.

7. Luenberger, D., Optimization by Vector Space Methods, Wiley, 1969.

8. Glover, K., "All Optimal Hankel-Norm Approximation of Linear Multivariable Systems and Their L_∞ Error Bounds", International Journal of Control", Vol. 39, No. 6, pp. 1115-1193, 1984.

9. Laub A., et.al, " Computation of Balancing Transformations and Other Applications of Simultaneous Diagonalization Algorithms", IEEE TAC, Vol.32, pp.115-122, 1987.

10. Vidyasagar, Control System Synthesis, M.I.T. Press, 1985.

11. Paliouras, Complex Variables for Scientists and Engineers, Macmillan, 1975.

12. M. Safanov and Chiang, " A Schur Method for Balanced-Truncation Model Reduction", IEEE TAC, Vol.34, No.7, July 1989, pp. 729-733

13. Anderson and Liu, " Controller Reduction: Concepts and Approaches", IEEE TAC, Aug 1989, Vol.34, No. 8, pp. 802 -812

14. Mcfarlane et.al. "Reduced-Order Controller Design Using Coprime Factor Model Reduction", IEEE TAC, March 1990, Vol. 3, No. 3, pp. 369 - 373