

## تحلیل انتشار امواج الاستیک درون هدایت کننده کریستال فونونیک فولاد- اپوکسی به کمک روش تفاضل محدود بر مبنای جابه‌جایی

مهران مرادی\* و محمد باقری نوری

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان

(دریافت مقاله: ۱۳۹۴/۰۷/۰۵ - دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۵/۰۳/۱۱)

DOI: 10.18869/acadpub.jcme.36.1.39

چکیده - به منظور به دست آوردن طیف عبور امواج در کریستال فونونیک و هدایت کننده مربوطه، یک الگوریتم جدید در این مقاله ارائه می‌شود. با استخراج فرم بر مبنای جابه‌جایی معادلات موج الاستیک و گسسته‌سازی آن، الگوریتم تفاضل محدود بر مبنای جابه‌جایی در حوزه زمان معرفی می‌شود. دو مثال عددی با این روش محاسبه و نتایج با روش مرسوم تفاضل محدود در حوزه زمان مقایسه می‌شود. به علاوه هزینه محاسباتی روش جدید با روش مرسوم تفاضل محدود در حوزه زمان مقایسه شده است. این مقایسه نشان داد که زمان محاسباتی لازم در روش تفاضل محدود بر مبنای جابه‌جایی در حوزه زمان ۴۰ درصد از روش مرسوم تفاضل محدود در حوزه زمان کمتر است. واژه‌های کلیدی: کریستال فونونیک، انتشار موج، تفاضل محدود در حوزه زمان، فرمول‌بندی بر مبنای جابه‌جایی.

## Simulation of Elastic Wave Propagation through Steel/Epoxy Phononic Crystal Waveguide by Displacement-Based Finite Difference Method

M. Moradi\* and M. Bagheri Nouri

Department of Mechanical Engineering, Isfahan University of Technology, Isfahan, Iran

**Abstract:** In order to obtain transmission spectra through a phononic crystal as well as its waveguide, a new algorithm is presented in this paper. By extracting displacement-based forms of elastic wave equations and their discretization, Displacement-Based Finite Difference Time Domain (DBFDTD) algorithm is presented. Two numerical examples are solved with this method and the results are compared with the conventional Finite Difference Time Domain (FDTD) method. In addition, the computational cost of the new approach has been compared with the conventional FDTD method. This comparison showed that the computation time of the DBFDTD method is 40 percent less than that of the conventional FDTD method.

**Keywords:** Phononic crystal, Wave propagation, Finite difference time domain, Displacement-based formulation.

\*: مسئول مکاتبات، پست الکترونیکی: moradi@cc.iut.ac.ir

$v_i$	مؤلفه $i$ ام سرعت	$C_{11}$	ضریب الاستیک ماده ایزوتروپیک
$\Delta t$	گام زمانی	$C_{12}$	ضریب الاستیک ماده ایزوتروپیک
$\Delta x$	گام مکانی در راستای $x$	$C_{44}$	ضریب الاستیک ماده ایزوتروپیک
$\Delta y$	گام مکانی در راستای $y$	$C_{ijmn}$	تانسور استحکام الاستیک
$\rho$	چگالی	$(l,m)$	مشخصه گره نمونه
$\sigma_{ij}$	تانسور تنش	$u_i$	مؤلفه $i$ ام جابجایی

### ۱- مقدمه

در سال‌های اخیر کریستال‌های فونونیک توجه زیادی را به خود جلب کرده‌اند. این ساختارهای غیرهمگن از تکرار آخال‌ها<sup>۱</sup> در یک ماده زمینه متفاوت تشکیل می‌شوند. به محدوده فرکانسی که این کریستال‌ها از انتشار امواج الاستیک در هر راستایی ممانعت می‌کنند شکاف نواری کامل<sup>۲</sup> اطلاق می‌شود. به دلیل این ویژگی، کریستال‌های فونونیک می‌توانند انتشار امواج الاستیک را در هر راستایی مدیریت کنند [۱ و ۲]. برخی از کاربردهای کریستال‌های فونونیک شامل فیلتر آکوستیک و هدایت کننده<sup>۳</sup> موج است.

تاکنون پژوهش‌های گوناگونی به بررسی نظری و آزمایشگاهی کریستال‌های فونونیک اختصاص داده شده‌اند [۶-۳]. در بررسی نظری این کریستال‌ها محققان مختلفی از روش بسط موج صفحه‌ای<sup>۴</sup> استفاده کرده‌اند [۷-۱۰]. علی‌رغم سادگی، این روش در تحلیل کریستال‌هایی که عدم تطابق زیادی دارند دچار مشکلات واگرایی می‌شود. برای رفع این مشکلات به تعداد زیادی موج صفحه‌ای نیاز است. به‌علاوه روش بسط موج صفحه‌ای در حالتی که آخال سیال یا خلأ است ناکارآمد می‌شود [۱۱-۱۲].

محققین مختلفی در مطالعه کریستال‌های فونونیک از روش تفاضل محدود در حوزه زمان<sup>۵</sup> بهره برده‌اند [۱۳-۱۶]. همچنین روش المان مرزی<sup>۶</sup> [۱۷]، روش پراکنندگی چندگانه<sup>۷</sup> [۱۸]، روش موجک<sup>۸</sup> [۱۹] و روش اجزاء محدود [۲۰] در شبیه‌سازی

کریستال‌های فونونیک اعمال شده‌اند.

از میان روش‌های عددی موجود، روش تفاضل محدود در حوزه زمان مزیت‌های گوناگونی دارد. حتی در صورت وجود عدم تطابق زیاد، این روش قادر است تا کریستال‌های فونونیک را تحلیل کند. این روش می‌تواند ساختارهایی با ابعاد محدود و دارای آخال با شکل دلخواه را بررسی کند. علاوه بر این، روش مذکور به محاسبات ماتریسی نیاز ندارد (صریح<sup>۹</sup>). با وجود این مزایا، روش تفاضل محدود در حوزه زمان به محاسبات قابل توجهی نیاز دارد. بنابراین شایسته است تا کارآیی این روش بهبود یابد.

در این مقاله یک الگوریتم جدید برای بررسی کریستال‌های فونونیک ارائه شده است. در ابتدا با ترکیب معادلات حرکت و قوانین ساختاری<sup>۱۰</sup>، معادلات موج الاستیک بر مبنای جابه‌جایی استخراج می‌شود. سپس این معادلات توسط روش تفاضل محدود گسسته‌سازی<sup>۱۱</sup> می‌شود. در این مقاله الگوریتم جدید روش تفاضل محدود بر مبنای جابه‌جایی در حوزه زمان نامیده می‌شود. معادلات مربوط به روش تفاضل محدود بر مبنای جابه‌جایی در حوزه زمان و روش مرسوم تفاضل محدود در حوزه زمان در ادامه ارائه می‌شوند. مقایسه معادلات مربوط به روش تفاضل محدود بر مبنای جابه‌جایی در حوزه زمان با معادلات روش مرسوم تفاضل محدود در حوزه زمان نشان می‌دهد که الگوریتم جدید به عملیات پایه حسابی کمتری نیاز دارد. بنابراین هزینه محاسباتی این روش از روش مرسوم کمتر

است.

$$v_{\tau}^{l+1/2, m+1/2, n+1/2} = v_{\tau}^{l+1/2, m+1/2, n-1/2} + \frac{\Delta t / \rho^{l+1/2, m+1/2, n} [(\sigma_{\tau\tau}^{l+1/2, m+1/2, n} - \sigma_{\tau\tau}^{l+1/2, m, n}) / \Delta y + (\sigma_{\tau\tau}^{l+1/2, m+1/2, n} - \sigma_{\tau\tau}^{l, m+1/2, n}) / \Delta x]}{\Delta y} \quad (5)$$

$$u_{\tau}^{l, m, n+1} = u_{\tau}^{l, m, n} + v_{\tau}^{l, m, n+1/2} \Delta t \quad (6)$$

$$u_{\tau}^{l+1/2, m+1/2, n+1} = u_{\tau}^{l+1/2, m+1/2, n} + v_{\tau}^{l+1/2, m+1/2, n+1/2} \Delta t \quad (7)$$

$$\sigma_{\tau\tau}^{l+1/2, m, n} = C_{\tau\tau}^{l+1/2, m} (u_{\tau}^{l+1/2, m, n} - u_{\tau}^{l, m, n}) / \Delta x + C_{\tau\tau}^{l+1/2, m} (u_{\tau}^{l+1/2, m+1/2, n} - u_{\tau}^{l+1/2, m-1/2, n}) / \Delta y \quad (8)$$

$$\sigma_{\tau\tau}^{l, m+1/2, n} = C_{\tau\tau}^{l, m+1/2} [(u_{\tau}^{l, m+1/2, n} - u_{\tau}^{l, m, n}) / \Delta y + (u_{\tau}^{l+1/2, m+1/2, n} - u_{\tau}^{l-1/2, m+1/2, n}) / \Delta x] \quad (9)$$

$$\sigma_{\tau\tau}^{l+1/2, m, n} = C_{\tau\tau}^{l+1/2, m} (u_{\tau}^{l+1/2, m+1/2, n} - u_{\tau}^{l+1/2, m-1/2, n}) / \Delta y + C_{\tau\tau}^{l+1/2, m} (u_{\tau}^{l+1/2, m, n} - u_{\tau}^{l, m, n}) / \Delta x \quad (10)$$

معادله (۴) نشان می‌دهد که برای به‌روزرسانی مؤلفه  $x$  سرعت در گره  $(l, m)$ ، لازم است تا مؤلفه‌های تانسور تنش در چهار مختصات (یعنی:  $\sigma_{\tau\tau}^{l+1/2, m, n}$ ،  $\sigma_{\tau\tau}^{l-1/2, m, n}$ ،  $\sigma_{\tau\tau}^{l+1/2, m, n}$  و  $\sigma_{\tau\tau}^{l, m+1/2, n}$ ) محاسبه شود. همان‌طور که معادلات (۸) و (۹) نشان می‌دهد محاسبه هر یک از این مؤلفه‌های تانسور تنش به عملیات پایه حسابی قابل توجهی نیاز دارد. برای به‌دست آوردن طیف عبور یک کریستال فونونیک از مؤلفه‌های جابه‌جایی تبدیل فوریه گرفته می‌شود. بنابراین مؤلفه‌های تانسور تنش محاسبه شده تأثیر مستقیمی در محاسبات ندارند.

### ۳- فرمول‌بندی بر مبنای جابه‌جایی

همان‌طور که در بخش ۲ گفته شد، روش مرسوم تفاضل محدود در حوزه زمان به محاسبه مؤلفه‌های تانسور تنش نیاز دارد که این مؤلفه‌ها تنها در به‌روزرسانی مؤلفه‌های جابه‌جایی کاربرد دارند. با به‌دست آوردن فرم بر مبنای جابه‌جایی معادلات موج الاستیک و گسسته‌سازی معادلات نتیجه، می‌توان مؤلفه‌های تانسور تنش را از معادلات به‌روزرسانی حذف کرد. این کار معادلات به‌روزرسانی بهینه را حاصل می‌دهد که به عملیات پایه حسابی کمتری نسبت به روش مرسوم تفاضل محدود در حوزه

دو مثال عددی به کمک الگوریتم پیشنهادی بررسی شده است. ابتدا طیف عبور<sup>۱۲</sup> یک کریستال فونونیک محاسبه شده است. این کریستال از آرایش مربعی فولاد در اپوکسی تشکیل می‌شود. سپس هدایت‌کننده مربوطه مورد تحلیل قرار گرفته است. همچنین نتایج و هزینه محاسباتی روش جدید با روش مرسوم مقایسه شده است.

### ۲- فرمول‌بندی روش مرسوم

برای سادگی کریستال فونونیک دوبعدی در نظر گرفته می‌شود. این فرمول‌بندی را می‌توان به آسانی به حالت سه بعدی تعمیم داد. آخال‌ها در راستای محور  $z$  قرار گرفته و درون صفحه  $xy$  تکرار می‌شوند. انتشار امواج الاستیک با معادلات زیر قابل توصیف است:

$$\rho \dot{v}_i = \sigma_{ij, j} \quad (1)$$

$$v_i = \dot{u}_i \quad (2)$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} u_{m, n} \quad (3)$$

در این معادلات  $C_{ijkl}(x, y)$ ،  $\rho = \rho(x, y)$  و  $u_i$  و  $v_i$  به ترتیب چگالی، تانسور استحکام الاستیک<sup>۱۳</sup>، مؤلفه  $i$  ام جابه‌جایی و مؤلفه  $i$  ام سرعت ساختار است. قرارداد جمع روی اندیس‌های تکراری اعمال می‌شود. با توجه به فرض انتشار موج الاستیک درون صفحه  $xy$ ، جابه‌جایی، سرعت و تانسور تنش شبکه به  $z$  بستگی ندارد یعنی:  $u_i = u_i(x, y, t)$  و  $v_i = v_i(x, y, t)$  و  $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(x, y, t)$ .

حال معادلات (۱) تا (۳) را می‌توان گسسته‌سازی و با روش مرسوم تفاضل محدود در حوزه زمان حل کرد. فرض کنید که آخال‌ها و زمینه ایزوتروپیک باشند و مد ترکیبی مورد نظر باشد، در آن صورت فرم گسسته‌سازی شده معادلات (۱) تا (۳) در گره نمونه  $(l, m)$  در گام زمانی  $n+1$  به صورت زیر بیان می‌شود:

$$v_{\tau}^{l, m, n+1/2} = v_{\tau}^{l, m, n-1/2} + \frac{\Delta t / \rho^{l, m} [(\sigma_{\tau\tau}^{l+1/2, m, n} - \sigma_{\tau\tau}^{l-1/2, m, n}) / \Delta x + (\sigma_{\tau\tau}^{l, m+1/2, n} - \sigma_{\tau\tau}^{l, m-1/2, n}) / \Delta y]}{\Delta x} \quad (4)$$

زمان نیاز دارد. بنابراین هزینه محاسباتی مورد نیاز این معادلات به روزرسانی بهینه از روش مرسوم کمتر است. فرایند استخراج این معادلات به روزرسانی در ادامه توضیح داده می شود. برای نقاط دور از تداخل آخال و زمینه می توان نوشت:

$$\sigma_{ij,j} = C_{ijmn} u_{m,nj} \quad (11)$$

با قرار دادن معادله (11) در معادله (1) فرمول بندی بر مبنای جابه جایی معادلات انتشار موج الاستیک در کریستال فونونیک به صورت زیر به دست می آید:

$$\rho \dot{v}_i = C_{ijmn} u_{m,nj} \quad (12)$$

حال می توان با استفاده از تفاضل محدود، معادله بر مبنای جابه جایی (12) را در هر دو حوزه زمان و مکان گسسته سازی کرد. فرم گسسته سازی شده معادله (12) که در این مقاله روش تفاضل محدود بر مبنای جابه جایی در حوزه زمان نامیده می شود در ادامه ارائه می شود. برای گسسته سازی معادله (12) همه مشتقات با تقریب تفاضل مرکزی<sup>۱۴</sup> جایگزین شده اند. معادلات به روزرسانی حاصل را می توان برای به دست آوردن سرعت و جابه جایی نقاط غیرتداخلی<sup>۱۵</sup> شبکه به کار برد. برای نقاط تداخلی شبکه فرم گسسته سازی شده معادلات (1) تا (3) اعمال می شود.

فرض کنید که جنس ماده آخال و زمینه ایزوتروپیک باشد. برای مطالعه مد ترکیبی در این حالت معادله (12) به صورت زیر قابل بازنویسی است:

$$\rho \dot{v}_1 = C_{11} u_{1,11} + C_{44} u_{1,22} + (C_{12} + C_{44}) u_{2,12} \quad (13)$$

$$\rho \dot{v}_2 = C_{11} u_{2,22} + (C_{12} + C_{44}) u_{1,12} + C_{44} u_{2,11} \quad (14)$$

برای نمایش مناسب فرم گسسته سازی شده معادلات (13) و (14) ضرایب زیر معرفی می شوند:

$$\lambda_1^{l,m} = C_{11}^{l,m} / \Delta x^2$$

$$\lambda_2^{l,m} = C_{44}^{l,m} / \Delta y^2$$

$$\lambda_3^{l,m} = (C_{12}^{l,m} + C_{44}^{l,m}) / (\Delta x \Delta y)$$

$$\eta_1^{l+1/2,m+1/2} = C_{11}^{l+1/2,m+1/2} / \Delta y^2$$

$$\eta_2^{l+1/2,m+1/2} = C_{44}^{l+1/2,m+1/2} / \Delta x^2$$

$$\eta_3^{l+1/2,m+1/2} = (C_{12}^{l+1/2,m+1/2} + C_{44}^{l+1/2,m+1/2}) / (\Delta x \Delta y) \quad (15)$$

ضرایبی را که معادله (15) معرفی می کند می توان قبل از حلقه زمانی روش تفاضل محدود بر مبنای جابه جایی در حوزه زمان محاسبه و در ماتریس های مناسب ذخیره کرد. در این صورت به محاسبه آنها در هر گام زمانی نیازی نیست. گسسته سازی معادله (13) با استفاده از تکنیک تفاضل محدود به معادله زیر منجر می شود:

$$v_1^{l,m;n+1/2} = v_1^{l,m;n-1/2} + (\Delta t / \rho^{l,m}) \Sigma \quad (16)$$

که در آن:

$$\begin{aligned} \Sigma = & -\tau(\lambda_1^{l,m} + \lambda_2^{l,m}) u_1^{l,m;n} + \lambda_1^{l,m} (u_1^{l+1/2,m;n} + u_1^{l-1/2,m;n}) + \\ & \lambda_2^{l,m} (u_1^{l,m+1/2;n} + u_1^{l,m-1/2;n}) + \lambda_3^{l,m} (u_2^{l+1/2,m+1/2;n} - \\ & u_2^{l+1/2,m-1/2;n} - u_2^{l-1/2,m+1/2;n} + u_2^{l-1/2,m-1/2;n}) \end{aligned} \quad (17)$$

فرم گسسته سازی معادله (14) به صورت زیر قابل توصیف است:

$$v_2^{l+1/2,m+1/2;n+1/2} = v_2^{l+1/2,m+1/2;n-1/2} + (\Delta t / \rho^{l+1/2,m+1/2}) \chi \quad (18)$$

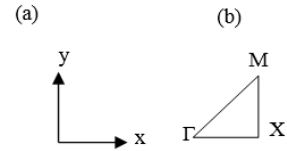
که در آن:

$$\begin{aligned} \chi = & -\tau(\eta_1^{l+1/2,m+1/2} + \eta_2^{l+1/2,m+1/2}) u_2^{l+1/2,m+1/2;n} + \\ & \eta_1^{l+1/2,m+1/2} (u_2^{l+1/2,m+3/2;n} + u_2^{l+1/2,m-1/2;n}) + \\ & \eta_2^{l+1/2,m+1/2} (u_2^{l+3/2,m+1/2;n} + u_2^{l-1/2,m+1/2;n}) + \\ & \eta_3^{l+1/2,m+1/2} (u_1^{l+1,m+1;n} - u_1^{l+1,m;n} - u_1^{l,m+1;n} + u_1^{l,m;n}) \end{aligned} \quad (19)$$

سپس مؤلفه های جابه جایی ساختار توسط معادلات (6) و (7) قابل به روزرسانی است. با مقایسه معادلات (16) و (17) با معادلات (4)، (8) و (9) بهینه بودن روش تفاضل محدود بر مبنای جابه جایی در حوزه زمان به آسانی قابل درک است. این مقایسه نشان می دهد که عملیات پایه حسابی معادلات (16) و (17) در حدود 50 درصد کمتر است.

#### ۴- مثال های عددی

فرض کنید که موج الاستیک درون صفحه xy منتشر می شود. بنابراین جابه جایی شبکه و تانسور تنش آن به Z بستگی ندارد. با



شکل ۱- کریستال فونونیک با آرایش مربعی فولاد در اپوکسی: نمونه‌ای با ۵ سلول واحد (سمت چپ)، ناحیه بریلئون کاهش یافته (سمت راست)

این فرض، مد ترکیبی که جابه‌جایی آن درون صفحه  $xy$  است از مد جانبی<sup>۱۶</sup> که جابه‌جایی آن در راستای محور  $z$  است مجزا می‌شود. در مثال‌هایی که در ادامه می‌آید، انتشار مد ترکیبی درون صفحه  $xy$  تحلیل می‌شود. در محاسبات عددی، آرایش مربعی استوانه‌های فولادی در زمینه اپوکسی در نظر گرفته می‌شود. در اعمال روش تفاضل محدود بر مبنای جابه‌جایی در حوزه زمان، شبکه‌ای متشکل از  $60 \times 60$  نقطه در سلول واحد فرض می‌شود. چگالی و ثابت‌های الاستیک  $C_{11}$  و  $C_{44}$  فولاد به ترتیب  $7780$  کیلوگرم بر مترمکعب،  $264$  و  $81$  گیگاپاسکال است. این مقادیر برای اپوکسی به ترتیب  $1142$  کیلوگرم بر مترمکعب،  $7/54$  و  $1/48$  گیگاپاسکال است. معادلات حرکت در ضمن  $2^{17}$  گام زمانی حل شده‌اند. مثال‌های عددی به کمک یک برنامه که براساس پردازش موازی در نرم‌افزار فرترن نوشته شده است محاسبه شده‌اند. برنامه فوق‌گره‌های شبکه را به چند بخش تقسیم و به‌روزرسانی جابه‌جایی هر یک از این بخش‌ها را به یک هسته پردازنده محول می‌کند.

#### ۴-۱- کریستال فونونیک فولاد در اپوکسی

به‌عنوان مثال اول، عبور امواج الاستیک توده‌ای<sup>۱۷</sup> درون کریستال فونونیک مربعی فولاد-اپوکسی بررسی می‌شود. ثابت شبکه و شعاع استوانه‌های فولادی به ترتیب  $a$  و  $\Gamma$  هستند. نسبت پرکندگی<sup>۱۸</sup>  $(f = \pi a^2 / \Gamma^2)$  فرض می‌شود. برای محاسبه طیف عبور کریستال فوق نمونه‌ای متشکل از ۵ سلول واحد در راستای  $x$  و یک سلول واحد در راستای  $y$  در نظر گرفته می‌شود (شکل (۱)). این نمونه در راستای  $\Gamma X$  ناحیه بریلئون<sup>۱۹</sup> قرار گرفته و توسط دو ناحیه همگن احاطه شده است. به‌عنوان شرط

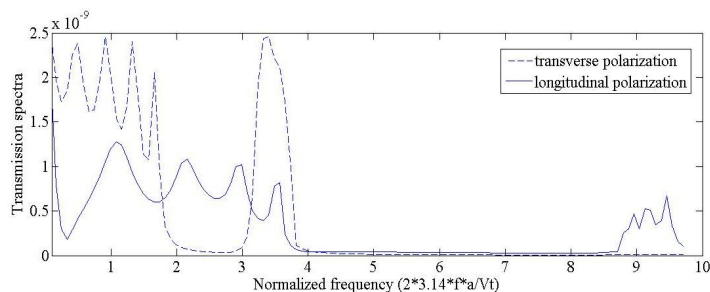
مرزی جاذب<sup>۲۰</sup>، در راستای محور  $x$  از لایه‌های کاملاً منطبق<sup>۲۱</sup> [۲۱-۲۲] استفاده شده است. برای مرزهایی که در راستای  $y$  قرار دارند شرط مرزی متناوب اعمال شد. در ناحیه همگن سمت چپ یک موج گوسی در راستای  $x$  ایجاد شده است. با اعمال تبدیل فوریه به میانگین مؤلفه  $x$  جابه‌جایی (مؤلفه  $y$  جابه‌جایی) نقاط واقع روی خطی با طول ثابت شبکه در ناحیه همگن سمت راست، طیف عبور امواج طولی (عرضی) به دست می‌آید. شکل (۲) طیف عبور کریستال را برای حالتی که موج اعمالی طولی یا عرضی باشد نشان می‌دهد. این نتایج به کمک روش تفاضل محدود بر مبنای جابه‌جایی در حوزه زمان به دست آمده است.

شکل (۲) نشان می‌دهد که در محدوده فرکانسی بدون بعد  $3/8$  تا  $8/7$  کریستال از انتشار موج الاستیک در راستای  $\Gamma X$  جلوگیری می‌کند خواه موج اعمالی عرضی باشد خواه طولی. به عبارت دیگر شکل (۲) نشان می‌دهد که یک شکاف<sup>۲۲</sup> بین  $3/8$  تا  $8/7$  وجود دارد. شکاف نواری محاسبه شده بر نتیجه محاسبه شده از روش مرسوم تفاضل محدود در حوزه زمان بسیار منطبق است (۳/۸-۸/۵) [۲۳].

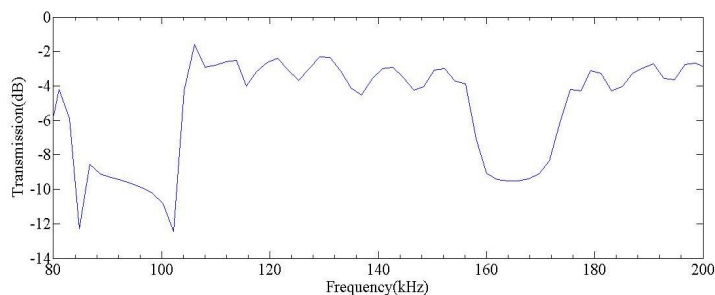
زمان مورد نیاز برای محاسبه طیف عبور موج طولی (یا عرضی) در روش تفاضل محدود بر مبنای جابه‌جایی در حوزه زمان ۳ دقیقه و ۲۸ ثانیه و برای روش مرسوم تفاضل محدود در حوزه زمان ۵ دقیقه و ۴۷ ثانیه است. محاسبات به کمک  $10$  هسته پردازنده  $3\text{GHz Intel Xeon CPU}$  انجام شده است. در به دست آوردن طیف عبور، سلول واحد به شبکه‌ای متشکل از  $60 \times 60$  نقطه گسسته‌سازی و معادلات در طی  $2^{16}$  گام زمانی حل شده‌اند. بنابراین زمان محاسباتی روش تفاضل محدود بر مبنای جابه‌جایی در حوزه زمان  $40\%$  درصد از روش مرسوم کمتر است.

#### ۴-۲- هدایت کننده کریستال فونونیک

ابرسلولی<sup>۲۳</sup> متشکل از  $12 \times 8/5$  سلول واحد در نظر گرفته شده است. عرض هدایت کننده (فاصله بین دو استوانه همسایه در دو سمت هدایت کننده)  $6$  میلی‌متر است. شرایط مرزی مانند مثال قبل است. دو ناحیه همگن ابرسلول را احاطه می‌کنند. یک



شکل ۲- طیف عبور کریستال در راستای GX که به کمک روش تفاضل محدود بر مبنای جابه‌جایی در حوزه زمان به دست آمده است: موج اعمالی طولی (خط پر) و عرضی (خط تیره)



شکل ۳- ضریب عبور هدایت کننده که توسط روش تفاضل محدود بر مبنای جابه‌جایی در حوزه زمان محاسبه شده

مرسوم تفاضل محدود در حوزه زمان تطابق بسیار خوبی دارند.

### ۵- نتیجه‌گیری

در این پژوهش روش تفاضل محدود بر مبنای جابه‌جایی در حوزه زمان برای شبیه‌سازی انتشار موج درون کریستال فونونیک ارائه شده است. در ابتدا فرم بر مبنای جابه‌جایی معادلات موج الاستیک استخراج و پس از آن این فرم توسط روش تفاضل محدود گسسته‌سازی شده است.

انتشار امواج الاستیک درون کریستال فونونیک مربعی فولاد- اپوکسی و هدایت کننده مربوطه به کمک الگوریتم جدید بررسی شده است. مقایسه ضریب عبور محاسبه شده توسط روش تفاضل محدود بر مبنای جابه‌جایی در حوزه زمان و روش مرسوم تفاضل محدود در حوزه زمان کارآمدی الگوریتم جدید را برای تحلیل کریستال فونونیک تأیید می‌کند. همچنین مقایسه هزینه محاسباتی روش تفاضل محدود بر مبنای جابه‌جایی در حوزه زمان و روش مرسوم تفاضل محدود در

موج گوسی در راستای محور X در ناحیه همگن سمت چپ ایجاد می‌شود. معادلات حرکت طی ۲ گام زمانی که هر یک ۷/۰۸ نانو ثانیه طول می‌کشد حل شده‌اند. با اعمال تبدیل فوریه به میانگین مؤلفه X جابه‌جایی روی عرض هدایت کننده (در ناحیه همگن سمت راست) و هم‌پایه نمودن<sup>۲۴</sup> آن به کمیت متناظر در حالتی که به جای کریستال فونونیک نیز ناحیه همگن قرار گیرد، ضریب عبور محاسبه می‌شود. شکل (۳) ضریب عبور هدایت کننده را برای موج اعمالی طولی نشان می‌دهد. این شکل به کمک روش تفاضل محدود بر مبنای جابه‌جایی در حوزه زمان به دست آمده است.

شکل (۳) نشان می‌دهد که برای فرکانس‌های زیر ۱۰۴ کیلوهرتز و محدوده فرکانسی ۱۵۶ تا ۱۷۵ کیلوهرتز یک شکاف وجود دارد. روش مرسوم تفاضل محدود در حوزه زمان نشان داده است که برای فرکانس‌های زیر ۱۰۲ کیلوهرتز و محدوده ۱۵۵ تا ۱۷۲ کیلوهرتز شکاف وجود دارد [۱۵]. بنابراین روش تفاضل محدود بر مبنای جابه‌جایی در حوزه زمان و روش

## واژه‌نامه

- |                                  |                                 |                                   |
|----------------------------------|---------------------------------|-----------------------------------|
| 1. inclusion                     | 9. explicit                     | 17. bulk elastic waves            |
| 2. complete band gap             | 10. constitute laws             | 18. filling fraction              |
| 3. waveguide                     | 11. discretize                  | 19. Brillouin zone                |
| 4. plane wave expansion (PWE)    | 12. transmission spectra        | 20. absorbing boundary condition  |
| 5. finite difference time domain | 13. elastic stiffness tensor    | 21. perfectly matched layer (PML) |
| 6. boundary element method       | 14. central difference estimate | 22. gap                           |
| 7. multiple-scattering method    | 15. non interfacial grid points | 23. supercell                     |
| 8. wavelet method                | 16. transverse mode             | 24. normalize                     |

## مراجع

- Kushwaha, M. S., Halevi, P., Dobrzynski, L., and Djafari-Rouhani, B., "Acoustic Band Structure of Periodic Elastic Composites", *Physical Review Letters*, Vol. 71, pp. 2022-2025, 1993.
- Martinez-Sala, R., Sancho, J., Sanchez, J. V., Gomez, V., Llinares, J., and Meseguer, F., "Sound Attenuation by Sculpture", *Nature*, Vol. 378, pp. 241-241, 1995.
- Montero de Espinosa, F. R., Jime'nez, E., and Torres, M., "Ultrasonic Band Gap in a Periodic Two-Dimensional Composite", *Physical Review Letters*, Vol. 80, pp. 1208-1211, 1998.
- Khelif, A., Choujaa, A., laihem, R., Wilm, M., Ballandras, S., and Laude, V., "Experimental Study of Band Gaps and Defect Modes in a Two-Dimensional Ultrasonic Crystal", *IEEE Ultrasonics Symposium*, pp. 377-380, 2003.
- Pennec, Y., Djafari-Rouhani, B., Vasseur, J. O., Khelif, A., and Deymier, P. A., "Tunable Filtering and Demultiplexing in Phononic Crystals with Hollow Cylinders", *Physical Review E*, Vol. 69, pp. 046608, 2004.
- Liu, W., Chen, J. W., and Su, X. Y., "Local Resonance Phononic Band Gaps in Modified Two-Dimensional Lattice Materials", *Acta Mechanica Sinica*, Vol. 28, pp. 659-669, 2012.
- Kafesaki, M., Sigalas, M. M., and Garcia, N., "Frequency Modulation in the Transmittivity of Wave Guides in Elastic-Wave Band-Gap Materials", *Physical Review Letters*, Vol. 85, pp. 4044-4047, 2000.
- Khelif, A., Djafari-Rouhani, B., Vasseur, J. O., and Deymier, P. A., "Transmission and Dispersion Relations of Perfect and Defect-Containing Waveguide Structures in Phononic Band Gap Materials", *Physical Review B*, Vol. 68, pp. 024302, 2003.
- Yao, Y., Hou, Z., and Liu, Y., "The Two-Dimensional Phononic Band Gaps Tuned by the Position of the Additional Rod", *Physics Letters A*, Vol. 362, pp. 494-499, 2007.
- Wu, B., Wei, R., Zhao, H., and He, C., "Phononic Band Gaps in Two-Dimensional Hybrid Triangular Lattice", *Acta Mechanica Solida Sinica*, Vol. 23, pp. 255-259, 2010.
- Tanaka, Y., Tomoyasu, Y., and Tamura, S., "Band Structure of Acoustic Waves in Phononic Lattices: Two-Dimensional Composites with Large Acoustic Mismatch", *Physical Review B*, Vol. 62, pp. 7387-7392, 2000.
- Hsieh, P., Wu, T., and Sun, J., "Three-Dimensional Phononic Band Gap Calculations Using the FDTD Method and a PC Cluster System", *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, Vol. 53, pp. 148-158, 2006.
- García-Pablos, D., Sigalas, M., Montero de Espinosa, F. R., Torres, M., Kafesaki, M., and García, N., "Theory and Experiments on Elastic Band Gaps", *Physical Review Letters*, Vol. 84, pp. 4349-4352, 2000.
- Khelif, A., Deymier, P. A., Djafari-Rouhani, B., Vasseur, J. O., and Dobrzynski, L., "Two-Dimensional Phononic Crystal with Tunable Narrow Pass Band: Application to a Waveguide with Selective Frequency", *Journal of Applied Physics*, Vol. 94, pp. 1308-1311, 2003.
- Sun, J. H., and Wu, T. T., "Analyses of Mode Coupling in Joined Parallel Phononic Crystal Waveguides", *Physical Review B*, Vol. 71, pp. 174303, 2005.
- Pennec, Y., Djafari-Rouhani, B., Larabi, H., Vasseur, J., and Hladky-Hennion, A. C., "Phononic Crystals and Manipulation of Sound", *Physica Status Solidi C*, Vol. 6, pp. 2080-2085, 2009.
- Gao, H. F., Matsumoto, T., Takahashi, T., and Isakari, H., "Analysis of Band Structure for 2D Acoustic Phononic Structure by BEM and the Block SS Method", *CMES: Computer Modeling in*

*Engineering & Sciences*, Vol. 90, No. 4, pp. 283-301, 2013.

18. Kafesaki, M.; and Economou, E. N., "Multiple-Scattering Theory for Three Dimensional Periodic Acoustic Composites", *Physical Review B*, Vol. 60, pp. 11993, 1999.
19. Yan, Z. Z.; and Wang, Y. S., "Wavelet-Based Method for Calculating Elastic Band Gaps of Two-Dimensional Phononic Crystals", *Journal of Computational Physics*, Vol. 74, pp. 224303, 2006.
20. Djafari-Rouhani, B., Vasseur, J. O., Hladky-Hennion, A. C., Deymier, P., Duval, F., Dubus, B., and Pennec, Y., "Absolute Band Gaps and Waveguiding in Free Standing and Supported Phononic Crystal Slabs", *Photonics and Nanostructures Fundamentals and Applications*, Vol. 6, pp. 32-37, 2008.
21. Chew, W. C., and Liu, Q. H., "Perfectly Matched Layers for Elastodynamics: A New Absorbing Boundary Condition", *Journal of Computational Acoustics*, Vol. 4, pp. 341-359, 1996.
22. Sun, J. H., and Wu, T. T., "Guided Surface Acoustic Waves in Phononic Crystal Waveguides", *IEEE Ultrasonics Symposium*, pp. 673-676, 2006.
23. Tanaka, Y., Yano, T., and Tamura, S., "Surface Guided Waves in Two-Dimensional Phononic Crystals", *Wave Motion*, Vol. 44, pp. 501-512, 2007.