

تحلیل غیرخطی کمانش نانوتیر کامپوزیتی با در نظر گرفتن نقص هندسی اولیه با استفاده از روش اجزاء محدود

مهدی محمدی مهر* و سجاد علی میرزایی
دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه کاشان، کاشان

(دریافت مقاله: ۱۳۹۴/۱۰/۲۱ - دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۵/۰۷/۱۳)

چکیده - در این پژوهش، تحلیل کمانش غیرخطی نانوتیر کامپوزیتی مدرج تابعی تقویت شده با توزیع‌های مختلف نانو لوله نیتريد-بور بر اساس تئوری الاستیسته غیرمحلّی به روش اجزاء محدود بررسی می‌شود. نانوتیر کامپوزیتی تحت بارگذاری‌های الکتروترمو مکانیکی و نقص هندسی اولیه در نظر گرفته می‌شود. نانولوله‌های نیتريد-بور در راستای ضخامت تیر به صورت یکنواخت و مدرج تابعی با چیدمان کاهشی - افزایشی توزیع شده‌اند و از مدل مخلوط توسعه یافته، برای تخمین خواص نانوتیر کامپوزیتی استفاده شده است. محیط الاستیک اطراف نانوتیر کامپوزیتی هوشمند به صورت بستر الاستیک مدل‌سازی شده است. معادلات حاکم با استفاده از روش انرژی و تئوری غیرموضعی الاستیسته استخراج شده و بار کمانش بحرانی برای نانوتیر کامپوزیتی با شرایط مرزی مختلف شامل دو طرف تکیه‌گاه ساده یا دو طرف تکیه‌گاه گیردار به روش اجزاء محدود به دست می‌آیند. نتایج نشان می‌دهد با افزایش پارامتر نقص هندسی، سفتی نانوتیر کامپوزیتی افزایش یافته، در نتیجه پایداری سازه افزایش می‌یابد. استحکام چیدمان کاهشی - افزایشی، بیشتر از توزیع یکنواخت است. همچنین با اعمال پارامترهای میدان الکتریکی و بستر الاستیک بار کمانش بحرانی نانوتیر کامپوزیتی افزایش می‌یابد.

واژه‌های کلیدی: تحلیل غیرخطی کمانش، نقص هندسی اولیه، توزیع‌های مختلف نانولوله نیتريد-بور، بستر الاستیک، تئوری غیرمحلّی الاستیسته، روش اجزاء محدود.

Nonlinear Buckling Analysis of Nano-composite Beam with Initial Geometrical Imperfection using Finite Element Method

M. Mohammadimehr* and S. Alimirzaei

Department of Mechanical Engineering, University of Kashan, Kashan, Iran

Abstract: In this research, the nonlinear buckling analysis of Functionally Graded (FG) nano-composite beam reinforced by various distributions of Boron Nitrid Nanotube (BNNT) is investigated under electro-thermodynamical loading with considering

* : مسئول مکاتبات، پست الکترونیکی: mmohammadimehr@kashanu.ac.ir

initial geometrical imperfection. The analysis is performed based on nonlocal elasticity theory and using the Finite Element Method (FEM). Various distributions of BNNT along the beam's thickness are considered as uniform and decreasing-increasing functionally graded; and the extended mixture model is used to estimate the properties of nano-composite beam. The elastic medium around the smart nano-composite beam is modeled as elastic foundation. The governing equations of equilibrium are derived using energy method and nonlocal elasticity theory; and the critical buckling load is obtained for various boundary conditions such as simply-simply supported (S-S) and clamped-clamped (C-C) using the FEM. The results indicate that with an increase in the geometrical imperfection parameter, the stiffness of nano-composite beam increases and consequently the stability of the system increases. The effect of FG-X distribution type is more than uniform distributions. Also, the critical buckling load of nano-composite beam increases with an increase in the electric field and elastic foundation.

Keywords: Nonlinear buckling analysis, Initial geometrical imperfection, Various distributions of BNNTs, Elastic foundation, Nonlocal elasticity theory, Finite element method.

فهرست علائم

ماتریس سختی کاهش یافته برای مؤلفه‌های پتانسیل الکتریکی و درجات آزادی	$[k_{\phi d}]$	درایه‌های ماتریس سختی الاستیک	c_{ij}
ماتریس سختی کاهش یافته برای مؤلفه‌های درجات آزادی و پتانسیل الکتریکی	$[k_{\phi d}]$	بردار جابه‌جایی الکتریکی	$\{D\}$
ماتریس سختی کاهش یافته برای مؤلفه‌های درجات آزادی	$[k_{dd}]$	مدول الاستیسیته	E
ماتریس توابع شکل	$[\bar{N}(x)]$	میدان الکتریکی	$\{E\}$
نیروی محوری	P_M	اثر مقیاس کوچک	e, a
بردار درجات آزادی	$\{\bar{q}\}$	ضرایب پیزوالکتریک	$[e]^T$
افزایش دما	T	بردار نیروی خارجی	$\{f\}$
ماتریس شیب سختی	$[T]$	مدول برشی	G
بردار کرنش	$\{\varepsilon\}$	ماتریس کمانش	$[G]$
ضرایب تنش حرارتی	λ	میدان جابه‌جایی برای گره‌های یک المان	$[G]^{-1}$
دامنه نقص هندسی	μ	مدول فنری وینکلر	k_w
ضریب پواسون	ν	مدول برشی پاسترناک	k_g
بردار تنش	$\{\sigma\}$	ماتریس سختی خطی	$[k]^{Linear}$
ثابت‌های دی الکتریک	ϵ	ماتریس سختی غیرخطی	$[k]^{Nonlinear}$
مؤلفه‌های میدان‌های جابه‌جایی مکانیکی و الکتریکی سیستم	u_j, w_j, ψ_j و ϕ_j	ماتریس سختی کاهش یافته برای مؤلفه‌های پتانسیل الکتریکی	$[k_{\phi\phi}]$

۱- مقدمه

نقص می‌تواند بر رفتار سازه مقابل بارهای وارده تا حد زیادی تأثیرگذار باشد. اکثر سازه‌ها در معرض عیوبی قرار می‌گیرند که از جمله این عیوب می‌توان به عیوب هندسی اشاره کرد. این عیوب در ساخت نانولوله‌ها از جمله نانولوله‌های نیتريد-بور مشاهده شده است. این نانولوله‌ها به دلیل خصوصیات مکانیکی،

همه سیستم‌ها از جمله سیستم‌های مکانیکی، در عمل به دلیل فرایند ساخت و آسیب‌های وارده در مراحل حمل و نقل و نصب فاقد یک هندسه کامل و بی‌نقص هستند. در واقع نقص‌هایی در سطح مقطع و طول سازه‌ها وجود دارد. حضور

الکتریکی و حرارتی جزء نانو ساختارهای هوشمند محسوب می‌شوند. از جمله تحقیقات انجام شده در زمینه تحلیل‌های الکترو- ترمو- مکانیکی نانو ساختارها، توابع مدرج، مواد هوشمند و عیوب هندسی، می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

وانگ و همکاران [۱] انتشار موج غیرخطی در نانولوله‌های تک جداره براساس تئوری غیرمحللی الاستیسیته را مورد بررسی قرار دادند. سپس آنها اثرات عیوب هندسی، تغییر دما و میدان مغناطیسی بر فرکانس قطع بررسی کردند. نتایج عددی آنها نشان داد که سهم اثرات مقیاس کوچک در تغییر شکل برشی و اینرسی چرخشی می‌تواند به کاهش در فرکانس منجر شود. لیو و همکاران [۲] به تجزیه و تحلیل مکانیکی کامپوزیت‌های تقویت شده با نانولوله‌های کربنی (CNTRC) و کامپوزیت‌های مدرج تابعی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی (FG-CNTRC) پرداختند. تأثیر پارامتر مقیاس کوچک طول بر کماتش و ارتعاشات ورق دو لایه نانو کامپوزیتی تقویت شده با نانولوله نیترید- بور با استفاده از تئوری تنش کوپل اصلاح شده توسط محمدی مهر و همکاران [۳] انجام گرفت. آنها نشان دادند که با افزایش نسبت طول به ضخامت بار کماتش بحرانی و فرکانس طبیعی بدون بعد افزایش پیدا یافته و همچنین با افزایش نسبت طول به عرض ورق، بار کماتش بحرانی و فرکانس طبیعی سازه کاهش می‌یابد. کماتش ورق‌های کامپوزیتی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی تک جداره با استفاده از روش‌های تحلیلی و المان محدود توسط قربانپور آرانی و همکاران [۴] بررسی شد. تأثیرات نانولوله کربنی، شرایط مرزی مختلف و ضریب رعنائی روی بار کماتش بحرانی ورق‌های کامپوزیتی مورد مطالعه قرار گرفت. لای [۵] به بررسی کماتش حرارتی تیر سه بعدی با در نظر گرفتن نقص هندسی، تحت توزیع دماهای مختلف پرداخت. نتایج وی نشان داد که توزیع دما، درصد حجمی الیاف، نقص هندسی و زاویه الیاف روی رفتار کماتشی تیر کامپوزیتی تأثیرگذار است. تحلیل کماتش و خمش نانوتیر تقویت شده با استفاده از روش تحلیلی توسط سیمسک و یورچی [۶] انجام شد. آنها نشان دادند که اعمال ضریب مقیاس

کوچک باعث کاهش بار کماتش بحرانی سیستم می‌شود. محمدی مهر و همکاران [۷] به بررسی کماتش غیرخطی میکرو ورق‌های ایزوتروپیک و ارتوتروپیک با استفاده از تئوری تنش کوپل اصلاح شده و به‌کارگیری روش مربع‌سازی دیفرانسیلی پرداختند. تأثیرات ضریب مقیاس کوچک، مدول الاستیسیته، اثرات سطحی، ضرایب ماتریس و همچنین شرایط مرزی مختلف روی کماتش غیرخطی سیستم مورد مطالعه قرار گرفت. کمیجانی و همکاران [۸] به تحلیل غیرخطی پایداری حرارتی و ارتعاشات ناشی از حرارت در تیرهای تقویت شده واقع بر بستر الاستیک پرداختند. کماتش نانوتیر واقع بر بستر الاستیک با در نظر گرفتن نقص هندسی اولیه توسط محمدی و همکاران [۹] مورد مطالعه قرار گرفت. آنها نتیجه گرفتند که با افزایش ثابت‌های مربوط به بستر الاستیک بار کماتش بحرانی افزایش یافته و پایداری سیستم بیشتر می‌شود. تحلیل کماتش و ارتعاشات ورق‌های ساندوویچی هسته‌دار و تقویت شده با نانولوله‌های کربنی با استفاده از روش مربع‌سازی دیفرانسیلی تعمیم یافته (GDQM) توسط محمدی مهر و شاهدی [۱۰] انجام گرفت. تأثیرات اثر درصد حجمی نانولوله‌ها، تغییرات دما، نسبت طول به ضخامت و همچنین شرایط مرزی مختلف روی بار کماتش بحرانی و فرکانس طبیعی سیستم مورد مطالعه گرفت. تحلیل ارتعاشات آزاد ورق دو لایه تقویت شده با توزیع‌های مختلف نانولوله کربنی براساس تئوری تغییر شکل برشی سینوسی با استفاده از روش بدون شبکه توسط محمدی مهر و همکاران [۱۱] انجام گرفت. تأثیرات اثر توزیع‌های مختلف نانولوله، بستر الاستیک، نیروهای واندروالس، ثابت میرایی و همچنین شرایط مرزی مختلف روی فرکانس طبیعی سیستم مورد مطالعه گرفت. در کار دیگری آنها [۱۲] تحلیل خمش، کماتش و ارتعاشات میکرو ورق تقویت شده تحت اثرات دمایی و رطوبتی را با استفاده از روش مربع‌سازی دیفرانسیلی را مورد مطالعه قرار دادند. تحلیل ارتعاشات غیرخطی نانولوله‌های تک جداره با در نظر گرفتن نقص هندسی اولیه تحت بارگذاری هارمونیک توسط وانگ و همکاران [۱۳]

انجام شد. تأثیرات پارامتر غیرمحللی و ثابت موج بر پاسخ دینامیکی مورد بررسی قرار گرفت. انجم شعاع و همکاران [۱۴] به تحلیل صفحات گرافن واقع بر بستر الاستیک با استفاده از روش المان محدود پرداختند. اثرات بستر الاستیک، نیروی و اندروالس بین صفحات، موده‌های مختلف، مدل‌های مختلف نانولوله‌های کربنی و شرایط مرزی مختلف بر بار کمانش بحرانی صفحات مورد بررسی قرار گرفت. ردی [۱۵] به معرفی تحلیل‌های غیرخطی تیر، ورق و پوسته با استفاده از روش اجزاء محدود پرداخت. آثار تجمع نانولوله و تنش سطحی بر روی کمانش دو محوره نانو ورق مرکب تقویتی شده با نانولوله‌های کربنی توسط قربانپورآرانی و همکاران [۱۶] مورد مطالعه قرار گرفت. آنها نشان دادند که بار کمانش دو محوری با افزایش پارامتر غیرمحللی کاهش می‌یابد. مورمو و پردهان [۱۷] به تحلیل کمانش نانولوله‌های کربنی تک جداره براساس تئوری غیرمحللی الاستیسیته با استفاده از روش DQM پرداختند. آنها تأثیر پارامترهای ضریب غیرمحللی، ثابت‌های وینکلر و پاسترناک بر بار کمانش بحرانی مورد مطالعه قرار دادند. آمابیلی و همکاران [۱۸] به بررسی اثرات نقص هندسی بر پایداری غیرخطی پوسته استوانه‌ای حاوی جریان سیال پرداختند. محمدی‌مهر و علی‌میرزائی [۱۹] به تحلیل غیرخطی خمش و ارتعاشات تیر نانو کامپوزیتی با در نظر گرفتن نقص هندسی اولیه با استفاده از روش اجزاء محدود پرداختند. تأثیرات توزیع‌های مختلف نانولوله، پارامتر نقص هندسی، ضرایب مغناطیس، ضریب رعنائی، ضرایب وینکلر و پاسترناک، شرایط مرزی مختلف و درصد حجمی مختلف الیاف روی فرکانس طبیعی و خمش تیر نانو کامپوزیتی مورد بررسی قرار گرفت. عبداللهی و همکاران [۲۰] به بررسی کمانش ورق‌های برشی مرتبه بالا با در نظر گرفتن بارهای الکتریکی پرداختند. اثرات بارهای الکتریکی، بارگذاری مختلف، ضریب رعنائی و ضخامت بر بار کمانش بحرانی سیستم مورد بررسی قرار گرفت.

هدف از تحقیق حاضر، تحلیل غیرخطی کمانش نانوتیر کامپوزیتی تقویت شده با توزیع‌های مختلف نانولوله نیتريد بور

با در نظر گرفتن نقص هندسی اولیه با استفاده از روش اجزاء محدود است که مزایا و تفاوت‌های تحقیق حاضر با سایر تحقیق‌ها به شرح ذیل بیان می‌شود:

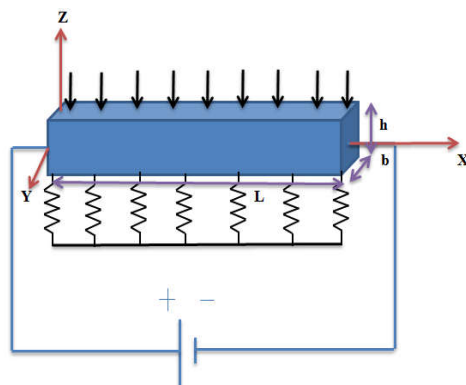
- ۱- تحلیل غیرخطی نانوتیر کامپوزیتی انجام شده و جملات غیرخطی در روابط لحاظ شده است.
- ۲- اثر نقص هندسی اولیه که در واقع توزیع ذاتی در سیستم‌ها است، روی بار کمانش بحرانی بررسی شده است.
- ۳- برای حل معادلات از روش المان محدود استفاده شده و در این روش به دلیل استفاده از فرمول‌بندی انتگرالی و استفاده از توابع وزنی پیوسته دقت حل بیشتر از برخی دیگر از روش‌های عددی است. همچنین به دلیل آسان بودن فهم روش و به کارگیری این روش در نرم‌افزارهای اجزاء محدود نویسندگان را تشویق به استفاده از این روش کرد، لذا برنامه‌نویسی این معادلات غیرخطی در نرم‌افزار متلب و اعتبارسنجی آن به روش اجزاء محدود انجام شد.
- ۴- از توابع شکل مرتبه بالا برای حل معادلات استفاده شده است.
- ۵- تأثیر پارامترهای مختلف شامل نقص هندسی اولیه، توزیع مختلف نانولوله، ضریب غیرموضعی الاستیسیته، بستر الاستیک، نسبت طول به ضخامت و شرایط مرزی مختلف بر بار کمانش بحرانی نانوتیر کامپوزیتی مورد مطالعه قرار گرفته است.

۲- مدل‌سازی ریاضی

در این تحقیق، کمانش غیرخطی نانوتیر کامپوزیتی تقویت شده با توزیع‌های مختلف نانولوله نیتريد-بور با در نظر گرفتن نقص هندسی اولیه بررسی می‌شود. محیط الاستیک توسط بستر الاستیک پاسترناک مدل‌سازی شده است. شکل (۱) شمای کلی نانوتیر کامپوزیتی مدرج تابعی تقویت شده با توزیع‌های مختلف نانولوله نیتريد-بور با در نظر گرفتن نقص هندسی نشان می‌دهد.

۲-۱- معادلات حاکم بر نانوتیر کامپوزیتی

روابط تنش- کرنش برای یک سازه پیزوالکتریکی تحت بارهای ترکیبی به صورت زیر نوشته می‌شود [۲۱ و ۲۲]:



شکل ۱- شمای کلی نانوتیر کامپوزیتی مدرج تابعی تقویت شده با توزیع‌های مختلف نانولوله نیتريد- بور با در نظر گرفتن نقص هندسی اولیه

در هر نقطه به کرنش در آن نقطه وابسته است. در ابعاد کوچک تنش در نقطه متناسب با تنش در تمام نقاط جسم است. این پدیده اثر مقیاس کوچک نامیده شده و پارامتر $e_0 a$ نشان‌دهنده این اثر است. روابط تنش-کرنش صفحه‌ای نانوتیر کامپوزیتی تقویت شده با توزیع‌های مختلف نانولوله نیتريد- بور براساس تئوری الاستیسیته غیرموضعی ارینگن به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\left(1 - (e_0 a)^2 \nabla^2\right) \begin{Bmatrix} \sigma_{xx}^{nl} \\ \sigma_{yy}^{nl} \\ \sigma_{zz}^{nl} \\ \sigma_{yz}^{nl} \\ \sigma_{xz}^{nl} \\ \sigma_{xy}^{nl} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & c_{44} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & c_{55} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & c_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{xz} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \alpha_x \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{Bmatrix} \Delta T - \begin{bmatrix} e_{11} & \cdot & \cdot \\ e_{12} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_x \\ \cdot \\ \cdot \end{Bmatrix} \quad (2)$$

میدان الکتریکی در رابطه فوق به صورت زیر تعریف می‌شود [۲۱ و ۲۲]:

$$E_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (5)$$

طبق تئوری تیر تیموشنکو جابه‌جایی‌ها در راستای محور x , y و z به صورت (۶) تعریف می‌شوند [۲۳]:

$$\begin{aligned} u_1(x, z) &= u(x) + z\psi(x), \\ u_2(x, z) &= v, \\ u_3(x, z) &= w(x) \end{aligned} \quad (6)$$

در صورت وجود نقص هندسی اولیه، که اصولاً ناشی از فرایند ساخت است، معمولاً این نقص متناسب با تغییر شکل عرضی تیر در نظر گرفته می‌شود. با در نظر گرفتن این پارامتر

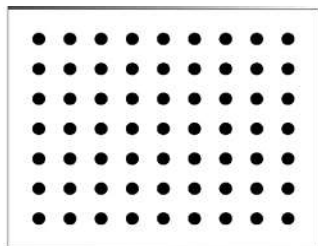
$\{\sigma\} = [c]\{\varepsilon\} - [e]^T \{E\} - \{\lambda\} T$ (۱)
 $\{D\} = [e]\{\varepsilon\} + [\varepsilon]^T \{E\} + \{\lambda\} T$
 $\{\sigma\}$, $\{D\}$, $\{E\}$ و $\{\lambda\}$ به ترتیب نشان‌دهنده تنش، کرنش، بردار جابه‌جایی الکتریکی، میدان الکتریکی و ضرایب تنش حرارتی هستند. همچنین T افزایش دما و $[e]^T$ و $[\varepsilon]^T$ به ترتیب نشان‌دهنده سختی الاستیک، ضرایب پیزوالکتریک و ثابت دی‌الکتریک هستند. در تئوری محلی مکانیک محیط پیوسته در مقیاس ماکرو، تنش

مؤلفه‌های سختی رابطه بالا به صورت زیر تعریف می‌شوند:

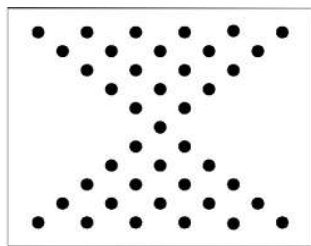
$$\begin{aligned} c_{11} = c_{22} = c_{33} &= \frac{E_{11}(z)}{1 - \nu_{12}^2(z)} \\ c_{12} = c_{13} = c_{23} &= \frac{\nu_{12}(z)E_{11}(z)}{1 - \nu_{12}^2(z)} \\ c_{44} = c_{55} = c_{66} &= G_{12}(z) \end{aligned} \quad (3)$$

رابطه جابه‌جایی الکتریکی براساس معادلات اساسی یک ماده پیزوالکتریک به صورت زیر تعریف می‌شود [۶ و ۲۴]:

$$D_x - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 D_x}{\partial x^2} = \left[e_{11} \left(\left\{ \frac{\partial u}{\partial x} + z \frac{\partial \psi}{\partial x} + \left(\mu + \frac{1}{\nu} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right\} - \alpha_x \Delta T \right) + \varepsilon_{11} E_x \right] \quad (4)$$



شکل ۲- نانو کامپوزیت مدرج تابعی با توزیع یکنواخت



شکل ۳- نانو کامپوزیت مدرج تابعی با توزیع کاهشی-افزایشی

۲-۳- توزیع کاهشی-افزایشی (SFG or FG-X)

در صورتی که که مطابق شکل (۳) نانولوله‌ها به صورت کاهشی-افزایشی در راستای ضخامت توزیع شوند آنگاه می‌توان نوشت [۱۹]:

$$v_{\text{BNNT}} = \left(\frac{2|z|}{h} \right) v_{\text{BNNT}}^* \quad (10)$$

همچنین با استفاده از روابط میکرومکانیک می‌توان چگالی، مدول الاستیسیته، ضرایب انبساط گرمایی و ضریب پواسون را برای نانو کامپوزیت به صورت زیر تعریف کرد [۲۳]:

$$\begin{aligned} E_{11} &= \eta_1 v_{\text{BNNT}} E_{11}^{\text{BNNT}} + v_m E_m \\ \frac{\eta_2}{G_{12}} &= \frac{v_{\text{BNNT}}}{G_{12}^{\text{BNNT}}} + \frac{v_m}{G_m} \\ \nu &= v_{\text{BNNT}} \nu_{\text{BNNT}} + v_m \nu_m \\ \rho &= v_{\text{BNNT}} \rho_{\text{BNNT}} + v_m \rho_{\text{cn}} \\ \alpha_{xx} &= \alpha_{11} = v_{\text{BNNT}} \alpha_{11}^{\text{BNNT}} + v_m \alpha_m \end{aligned} \quad (11)$$

η_1 و η_2 ضرایب بازدهی نانولوله و بدون واحد هستند، همچنین v_m و v_{BNNT} به ترتیب نشان‌دهنده کسر حجمی نانولوله و زمینه و بدون واحد هستند. G_{12}^{BNNT} و G_m ، به ترتیب مدول برشی نانولوله نیتريد بور، مدول برشی زمینه و مدول برشی نانوکامپوزیت هستند. همچنین، E_{11} مدول الاستیک

درصدی از موادهای مختلف به فرم غیرخطی به مدل اولیه اضافه می‌شود. روابط کرنش-جابجایی تیر تیموشنکو با در نظر گرفتن نقص هندسی اولیه به صورت (۷) تعریف می‌شود [۱، ۵، ۹ و ۱۳]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} + z \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ \varepsilon_{xz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \psi \right), \quad \gamma_{xz} = 2\varepsilon_{xz} \end{aligned} \quad (7)$$

w تغییر شکل عرضی تیر و w_0 پارامتر تعیین کننده وجود نقص هندسی است که به صورت یک فرم شبیه به تغییر شکل عرضی تیر با یک دامنه خاص در نظر گرفته شده و به صورت زیر تعریف می‌شود [۵، ۱۳ و ۲۵]:

$$w_0 = \mu w \quad (8-الف)$$

در رابطه فوق μ دامنه نقص هندسی اولیه است.

با جای‌گذاری رابطه (۸-الف) در رابطه (۷) چنین نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} + z \frac{\partial \psi}{\partial x} + \left(\frac{1}{2} + \frac{\mu}{2} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \varepsilon_{xz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \psi \right), \quad \gamma_{xz} = 2\varepsilon_{xz} \end{aligned} \quad (8-ب)$$

۲-۲- تخمین خواص نانوکامپوزیت

فرض کنید ذرات نانولوله نیتريد-بور به صورت مدرج تابعی باعث تقویت زمینه شوند. در صورتی که v_{BNNT} کسر حجمی نانولوله نیتريد-بور و v_m کسر حجمی زمینه باشد آنگاه $v_{\text{BNNT}} + v_m = 1$. در این تحقیق فرض شده است ذرات نانو با دو چیدمان مختلف شامل توزیع یکنواخت و مدرج تابعی زمینه را در راستای ضخامت تقویت می‌کنند. در ادامه به دو توزیع یکنواخت و کاهشی-افزایشی پرداخته می‌شود.

۲-۳- توزیع یکنواخت تک جهته (UD)

مطابق شکل (۲) در صورتی که ذرات نانولوله نیتريد-بور به طور یکنواخت در راستای ضخامت توزیع شوند به این چیدمان توزیع یکنواخت گویند که به صورت زیر بیان می‌شود:

$$v_{\text{BNNT}} = v_{\text{BNNT}}^* \quad (9)$$

v_{BNNT}^* نشان‌دهنده درصد حجمی نانولوله نیتريد بور است.

نانولوله، U ضریب پواسون نانوکامپوزیت، ρ چگالی نانوکامپوزیت، α_m و α_{11}^{BNNT} به ترتیب ضرایب انبساط نانولوله و زمینه هستند.

۳- استخراج معادلات حاکم با استفاده از روش انرژی

انرژی کلی سیستم از مجموع انرژی‌های پتانسیل و کار ناشی از نیروهای خارجی تشکیل می‌شود:

$$\Pi = U^S + W_{Ext} \quad (12)$$

که U^S و W_{Ext} به ترتیب نشان‌دهنده انرژی کرنشی و کار ناشی از نیروهای خارجی است و Π بیانگر انرژی پتانسیل کل است. اصل حداقل انرژی پتانسیل بیان می‌کند که تغییرات انرژی پتانسیل کل $\delta\Pi$ باید برابر صفر باشد، لذا چنین نتیجه می‌شود:

$$\delta\Pi = 0 \Rightarrow \delta U^S + \delta W_{Ext} = 0 \quad (13)$$

انرژی پتانسیل کرنشی برای نانوتیر کامپوزیتی تقویت شده با نانولوله‌های نیتريد- بور برابر است با:

$$U^S = \frac{1}{2} \int_0^L \int_A \left(\sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + \tau_{xz} \gamma_{xz} - D_x E_x \right) dA dx \quad (14)$$

که با جای‌گذاری رابطه (۷) در رابطه (۱۴) چنین نتیجه می‌شود:

$$U^S = \frac{1}{2} \int_0^L \int_A \left\{ \sigma_{xx} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + z \frac{\partial \psi}{\partial x} + \left(\mu + \frac{1}{\nu} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] + \sigma_{xz} \left[\frac{\partial w}{\partial x} + \psi \right] - D_x E_x \right\} dA dx \quad (15-الف)$$

$$U^S = \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ N_x \frac{\partial u}{\partial x} + Q_x \frac{\partial w}{\partial x} + Q_x \psi + M_x \frac{\partial \psi}{\partial x} + \left(\mu + \frac{1}{\nu} \right) N_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + D_x \frac{\partial \rho}{\partial x} \right\} dx \quad (15-ب)$$

که نیروی محوری (N_x)، نیروی برشی (Q_x) و گشتاور خمشی (M_x) در نانوتیر کامپوزیتی تقویت شده با نانولوله‌های نیتريد- بور با رابطه (۱۶) تعریف می‌شود:

$$N_x = \int_A \sigma_{xx} dA, \quad M_x = \int_A z \sigma_{xx} dA, \quad Q_x = k_s \int_A \sigma_{xz} dA \quad (16)$$

که k_s ضریب تصحیح برشی است.

با جای‌گذاری روابط (۲) و (۷) در رابطه (۱۶)، نیروی محوری، نیروی برشی و گشتاور خمشی غیرمحملی به صورت

زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} N_x - (e.a)^T \nabla^T N_x &= A'' \frac{\partial u}{\partial x} + A' \frac{\partial \psi}{\partial x} + A'' \left(\frac{1}{\nu} + \mu \right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ M_x - (e.a)^T \nabla^T M_x &= A' \frac{\partial u}{\partial x} + A'' \frac{\partial \psi}{\partial x} + A' \left(\frac{1}{\nu} + \mu \right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ Q_x - (e.a)^T \nabla^T Q_x &= B'' \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \psi \right) \end{aligned} \quad (17)$$

با استفاده از اصل حساب تغییرات، تغییرات انرژی کرنشی با در نظر گرفتن تئوری غیرمحملی الاستیسیته به صورت رابطه (۱۸) بیان می‌شود:

$$\delta U^S = \int_0^L \left\{ N_x \delta \frac{\partial u}{\partial x} + Q_x \delta \frac{\partial w}{\partial x} + Q_x \delta \psi + M_x \delta \frac{\partial \psi}{\partial x} + \left(\mu + \frac{1}{\nu} \right) N_x \delta \frac{\partial w}{\partial x} + D_x \delta \frac{\partial \rho}{\partial x} \right\} dx \quad (18)$$

در نهایت با ترکیب روابط (۱۷) و (۱۸) مربوط به نیروی محوری و ممان‌های خمشی با رابطه مربوط به انرژی پتانسیل کرنشی رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} \delta U^S &= \int_0^L \left\{ \frac{\partial \delta u}{\partial x} \left[A'' \frac{\partial u}{\partial x} + A' \frac{\partial \psi}{\partial x} + A'' \left(\mu + \frac{1}{\nu} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - (AT'') \Delta T + m_s \frac{\partial \rho}{\partial x} \right] + \frac{\partial \delta w}{\partial x} \left\{ k_s B'' \left[\psi + \frac{\partial w}{\partial x} \right] + \delta \psi \left[k_s B'' \left[\psi + \frac{\partial w}{\partial x} \right] \right] + \frac{\partial \delta w}{\partial x} (e.a)^T \nabla^T Q_x + \frac{\partial \delta \psi}{\partial x} \left[A' \frac{\partial u}{\partial x} + A'' \frac{\partial \psi}{\partial x} + A' \left(\mu + \frac{1}{\nu} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - (AT') \Delta T + m_s \frac{\partial \rho}{\partial x} \right] + \frac{\partial \delta w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} \left(\mu + \frac{1}{\nu} \right) \left[A'' \frac{\partial u}{\partial x} + A' \frac{\partial \psi}{\partial x} + A'' \left(\mu + \frac{1}{\nu} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - (AT'') \Delta T + m_s \frac{\partial \rho}{\partial x} \right] + \frac{\partial \delta w}{\partial x} \left(\mu + \frac{1}{\nu} \right) (e.a)^T \nabla^T \left(\frac{\partial w}{\partial x} N_x \right) + \frac{\partial \delta \rho}{\partial x} \left[m_s \frac{\partial u}{\partial x} + m_s \frac{\partial \psi}{\partial x} + m_s \left(\mu + \frac{1}{\nu} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - m_r \Delta T - m_r \frac{\partial \rho}{\partial x} \right] + (e.a)^T \nabla^T D_x \right\} dx \end{aligned} \quad (19)$$

همچنین کار خارجی نیروهای اعمال شده بر نانوتیر کامپوزیتی تقویت شده با نانولوله‌های نیتريد- بور، شامل انرژی پتانسیل

$$\int_0^L A_{11} \frac{\partial \delta \psi}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} dx + \int_0^L k_s B_{11}^* \delta \psi \frac{\partial w}{\partial x} dx + \int_0^L k_s B_{11}^* \delta \psi \psi dx + \int_0^L A_{11}^* \frac{\partial \delta \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \int_0^L m_{\gamma} \frac{\partial \delta \psi}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial x} dx + \int_0^L A_{11}^* (\mu + \frac{1}{\nu}) \frac{\partial \delta \psi}{\partial x} (\frac{\partial w}{\partial x})^{\gamma} dx - \int_0^L (AT_{11}^*) \frac{\partial \delta \psi}{\partial x} \Delta T dx = 0 \quad (ج-۲۱)$$

$$\int_0^L m_{\gamma} \frac{\partial \delta \rho}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} dx + \int_0^L m_{\gamma} \frac{\partial \delta \rho}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} dx - \int_0^L m_{\gamma} \frac{\partial \delta \rho}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial x} dx + \int_0^L (\mu + \frac{1}{\nu}) m_{\gamma} \frac{\partial \delta \rho}{\partial x} (\frac{\partial w}{\partial x})^{\gamma} dx - \int_0^L m_{\gamma} \frac{\partial \delta \rho}{\partial x} \Delta T dx = 0 \quad (د-۲۱)$$

ثابت‌های ذکر شده در روابط فوق به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A_{11}^i = b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^i c_{11} dz, \quad i = 0, 1, 2,$$

$$B_{11}^i = D_{11}^i = b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^i G dz, \quad i = 0, 1, 2,$$

$$AT_{11}^i = b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^i c_{11} \alpha dz, \quad i = 0, 1,$$

$$BT_{11}^i = b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^i G \alpha dz, \quad i = 0, 1,$$

$$CT_{11}^i = b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^i G \alpha_z dz, \quad i = 0, 1,$$

$$\{m_{\sigma}, m_{\gamma}\} = b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\nu, z) e_{11} dz,$$

$$m_{\gamma} = b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \epsilon_{11} dz \quad (۲۲)$$

در روابط فوق h معرف ارتفاع تیر کامپوزیتی است.

ناشی از بستر الاستیک و پتانسیل ناشی از نیروی محوری است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$W_{Elastic} = - \int_0^L (F_{Elastic Medium} w) dx = - \int_0^L \left(-k_w w + k_g \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) w dx \quad (۲۰-الف)$$

$$W_{Axialforce} = - \frac{1}{\nu} \int_0^L P_M (\frac{\partial w}{\partial x})^{\gamma} dx \quad (۲۰-ب)$$

در روابط فوق k_w ثابت فنری نوع وینکلر، k_g ثابت برشی نوع پاسترناک و P_M مقدار نیروی محوری است. با اعمال اصل حساب تغییرات بر روابط فوق داریم:

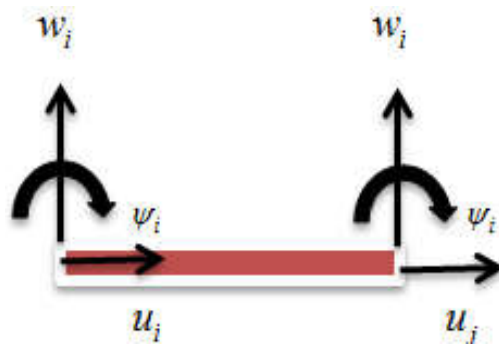
$$\delta W_{Elastic} = -b \int_0^L \left(-k_w w + k_g \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \delta w dx \quad (۲۰-ج)$$

$$\delta W_{Axialforce} = - \int_0^L P_M (\frac{\partial \delta w}{\partial x}) (\frac{\partial w}{\partial x}) dx \quad (۲۰-د)$$

با به‌کارگیری روش انرژی و روش ارائه شده در مقاله ردی [۲۶]، تغییرات انرژی برای نانوتیر کامپوزیتی تقویت شده با توزیع‌های مختلف نانولوله نیتريد- بور با در نظر گرفتن نقص هندسی اولیه به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\int_0^L A_{11}^* \frac{\partial \delta u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} dx + \int_0^L A_{11}^* (\mu + \frac{1}{\nu}) \frac{\partial \delta u}{\partial x} (\frac{\partial w}{\partial x})^{\gamma} dx + \int_0^L A_{11}^* \frac{\partial \delta u}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \int_0^L m_{\gamma} \frac{\partial \delta u}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial x} dx + \int_0^L (AT_{11}^*) \frac{\partial \delta u}{\partial x} \Delta T dx = 0 \quad (۲۱-الف)$$

$$b \int_0^L k_w \delta w w dx - b \int_0^L k_g \delta w \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx + \int_0^L k_s B_{11}^* \frac{\partial \delta w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} dx + \int_0^L k_s B_{11}^* \frac{\partial \delta w}{\partial x} \psi dx + \int_0^L (\mu + \frac{1}{\nu}) A_{11}^* \frac{\partial \delta w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} dx + \int_0^L (\mu + \frac{1}{\nu}) A_{11}^* \frac{\partial \delta w}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} dx + \int_0^L (\mu + \frac{1}{\nu})^{\gamma} A_{11}^* \frac{\partial \delta w}{\partial x} (\frac{\partial w}{\partial x})^{\gamma} \frac{\partial w}{\partial x} dx + \int_0^L (\mu + \frac{1}{\nu}) m_{\gamma} \frac{\partial \delta w}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} dx - \int_0^L (1 - (e, a)^{\gamma} \nabla^{\gamma}) b P_M \frac{\partial \delta w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} dx - \int_0^L (\mu + \frac{1}{\nu}) (AT_{11}^*) \frac{\partial \delta w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} \Delta T dx = 0 \quad (۲۱-ب)$$



شکل ۴- المان نانوتیر تیموشنکو با درجات آزادی در هر گره

۳-۱- روش حل و شرایط مرزی

در این تحقیق، برای حل معادلات حاکم بر نانوتیر کامپوزیتی مدرج تابعی تقویت شده با نانولوله نیترید- بور تحت بارهای الکتروترمو مکانیکی با در نظر گرفتن نقص هندسی اولیه از روش اجزاء محدود استفاده شده است. طبق این روش توابع مربوط به متغیرهای مسئله به گونه‌ای باید به دست آیند که شرایط مرزی و معادلات حاکم بر نانوتیر کامپوزیتی را برآورده کنند.

۳-۱-۱- فرمول بندی توابع شکل

در این قسمت به استخراج توابع شکل با استفاده از توابع درون‌یاب و حل مسئله با استفاده از این توابع پرداخته شده و در نهایت فرم ماتریسی معادلات حاکم بر سیستم استخراج می‌شود. شکل (۴) المان نانوتیر تیموشنکو با فرض جابه‌جایی محوری در نظر گرفته که این المان دارای دو گره بوده و هر گره آن دارای ۳ درجه آزادی \$(u, w, \psi)\$ و یک شرط مرزی میدان الکتریکی \$(\phi)\$ است.

طبق روش اجزاء محدود میدان جابه‌جایی محوری، عرضی، دورانی و میدان جابه‌جایی حاصل از میدان الکتریکی نانوتیر کامپوزیتی تقویت شده با توزیع‌های مختلف نانولوله‌های نیترید- بور به صورت زیر تعریف می‌شود [۱۵]:

$$\begin{aligned} u(x) &= \sum_{j=1}^6 N_{u_j} u_j, \quad w(x) = \sum_{j=1}^6 N_{w_j} w_j, \\ \psi(x) &= \sum_{j=1}^6 N_{\psi_j} \psi_j, \quad \phi(x) = \sum_{j=1}^6 N_{\phi_j} \phi_j \end{aligned} \quad (23)$$

\$u_j, w_j, \psi_j\$ و \$\phi_j\$ معرف مقادیر گره‌ای میدان جابه‌جایی و میدان

الکتریکی هر المان و نیز \$N_{\psi_j}, N_{w_j}, N_{u_j}, N_{\phi_j}\$ معرف توابع شکل مربوطه است که در ادامه به نحوه به دست آوردن این توابع پرداخته می‌شود. توابع درون‌یاب میدان‌های مذکور برای فرمول‌بندی اجزاء محدود به صورت زیر ارائه می‌شود [۲۴]:

$$\begin{aligned} u(x) &= c_1 + c_2 x + c_3 x^2 \\ w(x) &= c_4 + c_5 x + c_6 x^2 + c_7 x^3 \\ \psi(x) &= c_8 + c_9 x + c_{10} x^2 \\ \phi(x) &= c_{11} + c_{12} x \end{aligned} \quad (24)$$

این معادلات دارای دوازده ثابت هستند.

با جای گذاری رابطه (۲۴) در معادلات حاکمه سیستم چهار ثابت

برحسب هشت ثابت دیگر به صورت رابطه (۲۵) به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} c_3 &= \left(\frac{-A_{11}'}{A_{11}^*} \right) c_{10}, \quad c_6 = -\frac{1}{2} c_9, \quad c_7 = -\frac{1}{3} c_{10} \\ c_8 &= \frac{(-2(A_{11}^*)^2 + 2A_{11}^* A_{11}') c_{10} - A_{11}^* B_{11}^* k_s c_5}{A_{11}^* B_{11}^* k_s} \end{aligned} \quad (25)$$

با جای گذاری ثابت‌های به دست آمده در رابطه (۲۴)، رابطه (۲۶) به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} u &= c_1 + c_2 x + \left(-\frac{A_{11}'}{A_{11}^*} c_{10} \right) x^2 \\ w &= c_4 + c_5 x + \left(-\frac{1}{2} c_9 \right) x^2 + \left(-\frac{1}{3} c_{10} \right) x^3 \\ \psi &= -c_5 + c_9 x + \left(\frac{-2(A_{11}^*)^2 + 2A_{11}^* A_{11}'}{A_{11}^* B_{11}^* k_s} + x^2 \right) c_{10} \\ \phi &= c_{11} + c_{12} x \end{aligned} \quad (26)$$

در نهایت میدان‌های جابه‌جایی و الکتریکی اجزاء محدود برای یک المان تیر به فرم ماتریسی به صورت رابطه (۲۷) به دست می‌آید:

با در نظر گرفتن هر دو گره المان می‌توان نوشت:

$$[G]_{\lambda \times \lambda} = \begin{bmatrix} [N(\bullet)]_{\lambda \times \lambda} \\ [N(l_e)]_{\lambda \times \lambda} \end{bmatrix} \quad (28-ج)$$

در نهایت برای مقادیر گره‌ای و با توجه به رابطه (27-الف)، رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\{\bar{q}\} = [G]\{a\} \Rightarrow \{a\} = [G]^{-1}\{\bar{q}\} \quad (29)$$

با جای‌گذاری رابطه (29) در معادله (27-الف) روابط (30) حاصل می‌شوند [24]:

$$\{q\} = \begin{bmatrix} u(x) \\ w(x) \\ \psi_x(x) \\ \phi(x) \end{bmatrix} = [N(x)]\{a\} = \quad (30-الف)$$

$$[N(x)][G]^{-1}\{\bar{q}\} = [\bar{N}(x)]\{\bar{q}\}$$

$$\bar{N}(x) = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & \dots & N_7 & N_8 & N_9 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_u(x) \\ N_w(x) \\ N_\psi(x) \\ N_\phi(x) \end{bmatrix} \quad (30-ب)$$

که در رابطه فوق $\bar{N}(x)$ توابع شکل مربوط به درجات آزادی سیستم است، که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} N_1 &= 1 - \frac{x}{l_e}, & N_2 &= -(\hat{c}_1) x + \left(\frac{\hat{c}_1}{l_e}\right) x^2, \\ N_3 &= (\hat{c}_1) x - \left(\frac{\hat{c}_1}{l_e}\right) x^2, & N_4 &= (\hat{c}_1) x - \left(\frac{\hat{c}_1}{l_e}\right) x^2, \\ N_5 &= (\hat{c}_1) x - \left(\frac{\hat{c}_1}{l_e}\right) x^2, & N_6 &= (\hat{c}_1) x - \left(\frac{\hat{c}_1}{l_e}\right) x^2, \\ N_7 &= (\hat{c}_1) x - \left(\frac{\hat{c}_1}{l_e}\right) x^2, & N_8 &= (\hat{c}_1) x - \left(\frac{\hat{c}_1}{l_e}\right) x^2, \\ N_9 &= (\hat{c}_1) x - \left(\frac{\hat{c}_1}{l_e}\right) x^2, & N_{10} &= (\hat{c}_1) x - \left(\frac{\hat{c}_1}{l_e}\right) x^2, \\ N_{11} &= (\hat{c}_1) x - \left(\frac{\hat{c}_1}{l_e}\right) x^2, & N_{12} &= (\hat{c}_1) x - \left(\frac{\hat{c}_1}{l_e}\right) x^2, \\ N_{13} &= (\hat{c}_1) x - \left(\frac{\hat{c}_1}{l_e}\right) x^2, & N_{14} &= (\hat{c}_1) x - \left(\frac{\hat{c}_1}{l_e}\right) x^2, \\ N_{15} &= (\hat{c}_1) x - \left(\frac{\hat{c}_1}{l_e}\right) x^2, & N_{16} &= (\hat{c}_1) x - \left(\frac{\hat{c}_1}{l_e}\right) x^2, \\ N_{17} &= (\hat{c}_1) x - \left(\frac{\hat{c}_1}{l_e}\right) x^2, & N_{18} &= (\hat{c}_1) x - \left(\frac{\hat{c}_1}{l_e}\right) x^2, \\ N_{19} &= (\hat{c}_1) x - \left(\frac{\hat{c}_1}{l_e}\right) x^2, & N_{20} &= (\hat{c}_1) x - \left(\frac{\hat{c}_1}{l_e}\right) x^2, \\ N_{21} &= (\hat{c}_1) x - \left(\frac{\hat{c}_1}{l_e}\right) x^2, & N_{22} &= (\hat{c}_1) x - \left(\frac{\hat{c}_1}{l_e}\right) x^2, \\ N_{23} &= (\hat{c}_1) x - \left(\frac{\hat{c}_1}{l_e}\right) x^2, & N_{24} &= (\hat{c}_1) x - \left(\frac{\hat{c}_1}{l_e}\right) x^2, \\ N_{25} &= (\hat{c}_1) x - \left(\frac{\hat{c}_1}{l_e}\right) x^2, & N_{26} &= (\hat{c}_1) x - \left(\frac{\hat{c}_1}{l_e}\right) x^2, \\ N_{27} &= (\hat{c}_1) x - \left(\frac{\hat{c}_1}{l_e}\right) x^2, & N_{28} &= (\hat{c}_1) x - \left(\frac{\hat{c}_1}{l_e}\right) x^2, \\ N_{29} &= (\hat{c}_1) x - \left(\frac{\hat{c}_1}{l_e}\right) x^2, & N_{30} &= (\hat{c}_1) x - \left(\frac{\hat{c}_1}{l_e}\right) x^2, \\ N_{31} &= (\hat{c}_1) x - \left(\frac{\hat{c}_1}{l_e}\right) x^2, & N_{32} &= (\hat{c}_1) x - \left(\frac{\hat{c}_1}{l_e}\right) x^2, \\ N_{33} &= (\hat{c}_1) x - \left(\frac{\hat{c}_1}{l_e}\right) x^2, & N_{34} &= (\hat{c}_1) x - \left(\frac{\hat{c}_1}{l_e}\right) x^2, \\ N_{35} &= (\hat{c}_1) x - \left(\frac{\hat{c}_1}{l_e}\right) x^2, & N_{36} &= (\hat{c}_1) x - \left(\frac{\hat{c}_1}{l_e}\right) x^2, \\ N_{37} &= (\hat{c}_1) x - \left(\frac{\hat{c}_1}{l_e}\right) x^2, & N_{38} &= (\hat{c}_1) x - \left(\frac{\hat{c}_1}{l_e}\right) x^2, \\ N_{39} &= (\hat{c}_1) x - \left(\frac{\hat{c}_1}{l_e}\right) x^2, & N_{40} &= (\hat{c}_1) x - \left(\frac{\hat{c}_1}{l_e}\right) x^2, \\ N_{41} &= (\hat{c}_1) x - \left(\frac{\hat{c}_1}{l_e}\right) x^2, & N_{42} &= (\hat{c}_1) x - \left(\frac{\hat{c}_1}{l_e}\right) x^2, \\ N_{43} &= (\hat{c}_1) x - \left(\frac{\hat{c}_1}{l_e}\right) x^2, & N_{44} &= (\hat{c}_1) x - \left(\frac{\hat{c}_1}{l_e}\right) x^2, \\ N_{45} &= (\hat{c}_1) x - \left(\frac{\hat{c}_1}{l_e}\right) x^2, & N_{46} &= (\hat{c}_1) x - \left(\frac{\hat{c}_1}{l_e}\right) x^2, \\ N_{47} &= (\hat{c}_1) x - \left(\frac{\hat{c}_1}{l_e}\right) x^2, & N_{48} &= (\hat{c}_1) x - \left(\frac{\hat{c}_1}{l_e}\right) x^2, \\ N_{49} &= (\hat{c}_1) x - \left(\frac{\hat{c}_1}{l_e}\right) x^2, & N_{50} &= (\hat{c}_1) x - \left(\frac{\hat{c}_1}{l_e}\right) x^2, \\ N_{51} &= (\hat{c}_1) x - \left(\frac{\hat{c}_1}{l_e}\right) x^2, & N_{52} &= (\hat{c}_1) x - \left(\frac{\hat{c}_1}{l_e}\right) x^2, \\ N_{53} &= (\hat{c}_1) x - \left(\frac{\hat{c}_1}{l_e}\right) x^2, & N_{54} &= (\hat{c}_1) x - \left(\frac{\hat{c}_1}{l_e}\right) x^2, \\ N_{55} &= (\hat{c}_1) x - \left(\frac{\hat{c}_1}{l_e}\right) x^2, & N_{56} &= (\hat{c}_1) x - \left(\frac{\hat{c}_1}{l_e}\right) x^2, \\ N_{57} &= (\hat{c}_1) x - \left(\frac{\hat{c}_1}{l_e}\right) x^2, & N_{58} &= (\hat{c}_1) x - \left(\frac{\hat{c}_1}{l_e}\right) x^2, \\ N_{59} &= (\hat{c}_1) x - \left(\frac{\hat{c}_1}{l_e}\right) x^2, & N_{60} &= (\hat{c}_1) x - \left(\frac{\hat{c}_1}{l_e}\right) x^2, \\ N_{61} &= (\hat{c}_1) x - \left(\frac{\hat{c}_1}{l_e}\right) x^2, & N_{62} &= (\hat{c}_1) x - \left(\frac{\hat{c}_1}{l_e}\right) x^2, \\ N_{63} &= (\hat{c}_1) x - \left(\frac{\hat{c}_1}{l_e}\right) x^2, & N_{64} &= (\hat{c}_1) x - \left(\frac{\hat{c}_1}{l_e}\right) x^2, \\ N_{65} &= (\hat{c}_1) x - \left(\frac{\hat{c}_1}{l_e}\right) x^2, & N_{66} &= (\hat{c}_1) x - \left(\frac{\hat{c}_1}{l_e}\right) x^2, \\ N_{67} &= (\hat{c}_1) x - \left(\frac{\hat{c}_1}{l_e}\right) x^2, & N_{68} &= (\hat{c}_1) x - \left(\frac{\hat{c}_1}{l_e}\right) x^2, \\ N_{69} &= (\hat{c}_1) x - \left(\frac{\hat{c}_1}{l_e}\right) x^2, & N_{70} &= (\hat{c}_1) x - \left(\frac{\hat{c}_1}{l_e}\right) x^2, \\ N_{71} &= (\hat{c}_1) x - \left(\frac{\hat{c}_1}{l_e}\right) x^2, & N_{72} &= (\hat{c}_1) x - \left(\frac{\hat{c}_1}{l_e}\right) x^2, \\ N_{73} &= (\hat{c}_1) x - \left(\frac{\hat{c}_1}{l_e}\right) x^2, & N_{74} &= (\hat{c}_1) x - \left(\frac{\hat{c}_1}{l_e}\right) x^2, \\ N_{75} &= (\hat{c}_1) x - \left(\frac{\hat{c}_1}{l_e}\right) x^2, & N_{76} &= (\hat{c}_1) x - \left(\frac{\hat{c}_1}{l_e}\right) x^2, \\ N_{77} &= (\hat{c}_1) x - \left(\frac{\hat{c}_1}{l_e}\right) x^2, & N_{78} &= (\hat{c}_1) x - \left(\frac{\hat{c}_1}{l_e}\right) x^2, \\ N_{79} &= (\hat{c}_1) x - \left(\frac{\hat{c}_1}{l_e}\right) x^2, & N_{80} &= (\hat{c}_1) x - \left(\frac{\hat{c}_1}{l_e}\right) x^2, \\ N_{81} &= (\hat{c}_1) x - \left(\frac{\hat{c}_1}{l_e}\right) x^2, & N_{82} &= (\hat{c}_1) x - \left(\frac{\hat{c}_1}{l_e}\right) x^2, \\ N_{83} &= (\hat{c}_1) x - \left(\frac{\hat{c}_1}{l_e}\right) x^2, & N_{84} &= (\hat{c}_1) x - \left(\frac{\hat{c}_1}{l_e}\right) x^2, \\ N_{85} &= (\hat{c}_1) x - \left(\frac{\hat{c}_1}{l_e}\right) x^2, & N_{86} &= (\hat{c}_1) x - \left(\frac{\hat{c}_1}{l_e}\right) x^2, \\ N_{87} &= (\hat{c}_1) x - \left(\frac{\hat{c}_1}{l_e}\right) x^2, & N_{88} &= (\hat{c}_1) x - \left(\frac{\hat{c}_1}{l_e}\right) x^2, \\ N_{89} &= (\hat{c}_1) x - \left(\frac{\hat{c}_1}{l_e}\right) x^2, & N_{90} &= (\hat{c}_1) x - \left(\frac{\hat{c}_1}{l_e}\right) x^2, \\ N_{91} &= (\hat{c}_1) x - \left(\frac{\hat{c}_1}{l_e}\right) x^2, & N_{92} &= (\hat{c}_1) x - \left(\frac{\hat{c}_1}{l_e}\right) x^2, \\ N_{93} &= (\hat{c}_1) x - \left(\frac{\hat{c}_1}{l_e}\right) x^2, & N_{94} &= (\hat{c}_1) x - \left(\frac{\hat{c}_1}{l_e}\right) x^2, \\ N_{95} &= (\hat{c}_1) x - \left(\frac{\hat{c}_1}{l_e}\right) x^2, & N_{96} &= (\hat{c}_1) x - \left(\frac{\hat{c}_1}{l_e}\right) x^2, \\ N_{97} &= (\hat{c}_1) x - \left(\frac{\hat{c}_1}{l_e}\right) x^2, & N_{98} &= (\hat{c}_1) x - \left(\frac{\hat{c}_1}{l_e}\right) x^2, \\ N_{99} &= (\hat{c}_1) x - \left(\frac{\hat{c}_1}{l_e}\right) x^2, & N_{100} &= (\hat{c}_1) x - \left(\frac{\hat{c}_1}{l_e}\right) x^2, \end{aligned}$$

$$\{q\} = \begin{bmatrix} u \\ w \\ \psi_x \\ \phi \end{bmatrix} = [N(x)]\{a\}, \{a\} = \{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, \dots, c_{11}, c_{12}\}^T \quad (27-الف)$$

در رابطه فوق $[N(x)]$ ماتریس حاوی توابع x و $\{a\}$ بردار ثابت‌های است. در واقع $[N(x)]$ ماتریس حاوی توابع x است که برای کل المان با گره‌های ابتدایی و انتهایی تعریف می‌شود.

$$[N(x)] = \begin{bmatrix} 1 & x & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad (27-ب)$$

حال طبق رابطه (27-ب) و با ارزیابی ماتریس $[N(x)]$ در محل گره‌های ابتدایی و انتهایی، روابط (28) حاصل می‌شود با ارزیابی ماتریس در گره $x=0$ چنین نتیجه می‌شود:

$$[N(0)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad (28-الف)$$

به طور مشابه با ارزیابی ماتریس ارائه شده در رابطه (27-ب) در گره $x=l_e$ رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$[N(l_e)] = \begin{bmatrix} 1 & l_e & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad (28-ب)$$

ماتریس سختی، مؤلفه‌های خطی

$$\begin{cases} K_{ij}^{11} = \int_0^{le} A_{11}^0 \frac{dN_{ui}}{dx} \frac{dN_{uj}}{dx} dx \\ K_{ij}^{1r} = \int_0^{le} A_{11}^0 \frac{dN_{ui}}{dx} \frac{dN_{\psi j}}{dx} dx \\ K_{ij}^{1r} = \int_0^{le} m_s \frac{dN_{ui}}{dx} \frac{dN_{\phi j}}{dx} dx \end{cases} \quad (34-f)$$

$$\begin{cases} K_{ij}^{rr} = \int_0^{le} k_s B_{11}^0 \frac{dN_{wi}}{dx} \frac{dN_{wj}}{dx} dx + \\ b \int_0^{le} k_w N_{wi} N_{wj} dx - b \int_0^{le} k_g N_{wi} \frac{d^2 N_{wj}}{dx^2} dx \\ K_{ij}^{rr} = \int_0^{le} k_s B_{11}^0 \frac{\partial N_{wi}}{\partial x} N_{\psi j} dx \end{cases} \quad (34-b)$$

$$\begin{cases} K_{ij}^{r1} = \int_0^{le} A_{11}^0 \frac{dN_{\psi i}}{dx} \frac{dN_{uj}}{dx} dx \\ K_{ij}^{r1} = \int_0^{le} k_s B_{11}^0 N_{\psi i} \frac{\partial N_{wj}}{\partial x} dx \\ K_{ij}^{rr} = \int_0^{le} k_s B_{11}^0 N_{\psi i} N_{\psi j} dx + \\ \int_0^{le} A_{11}^0 \frac{dN_{\psi i}}{dx} \frac{dN_{\psi j}}{dx} dx \\ K_{ij}^{rr} = \int_0^{le} m_1 \frac{dN_{\psi i}}{dx} \frac{dN_{\phi j}}{dx} dx \end{cases} \quad (34-c)$$

$$\begin{cases} K_{ij}^{r1} = \int_0^{le} m_s \frac{dN_{\phi i}}{dx} \frac{dN_{uj}}{dx} dx \\ K_{ij}^{rr} = \int_0^{le} m_1 \frac{dN_{\phi i}}{dx} \frac{dN_{\psi j}}{dx} dx \\ K_{ij}^{rr} = - \int_0^{le} m_r \frac{\partial N_{\phi i}}{\partial x} \frac{\partial N_{\phi j}}{\partial x} dx \end{cases} \quad (34-d)$$

مؤلفه‌های غیرخطی

$$\begin{cases} K_{ij}^{1r} = \int_0^{le} (\mu + \frac{1}{\nu}) A_{11}^0 \frac{dN_{ui}}{dx} \frac{dN_{wj}}{dx} (\frac{dw}{dx}) dx \\ K_{ij}^{r1} = \nu \int_0^{le} (\mu + \frac{1}{\nu}) A_{11}^0 \frac{dN_{wi}}{dx} \frac{dN_{uj}}{dx} (\frac{\partial w}{\partial x}) dx \\ K_{ij}^{rr} = \nu \int_0^{le} (\mu + \frac{1}{\nu})^2 A_{11}^0 \frac{dN_{wi}}{dx} \frac{dN_{wj}}{dx} (\frac{dw}{dx})^2 dx \\ K_{ij}^{rr} = \nu \int_0^{le} (\mu + \frac{1}{\nu}) A_{11}^0 \frac{dN_{wi}}{dx} \frac{dN_{\psi j}}{dx} (\frac{dw}{dx}) dx \\ K_{ij}^{rr} = \int_0^{le} (\mu + \frac{1}{\nu}) A_{11}^0 \frac{dN_{\psi i}}{dx} \frac{dN_{wj}}{dx} (\frac{dw}{dx}) dx \\ K_{ij}^{rr} = \nu \int_0^{le} (\mu + \frac{1}{\nu}) m_s \frac{dN_{wi}}{dx} \frac{dN_{\phi j}}{dx} (\frac{dw}{dx}) dx \\ K_{ij}^{rr} = \int_0^{le} (\mu + \frac{1}{\nu}) m_s \frac{dN_{\phi i}}{dx} \frac{dN_{wj}}{dx} (\frac{dw}{dx}) dx \end{cases} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} N_{1r} &= - \left(\frac{\hat{c}_\lambda}{l_e} \right) x + (\nu \hat{c}_r) x^2, \\ N_{1\phi} &= \left(1 - \frac{x}{l_e} \right) \left(\frac{1}{\nu} + \frac{z}{h} \right), \\ N_{1\psi} &= \left(\frac{x}{l_e} \right) \left(\frac{1}{\nu} - \frac{z}{h} \right) \end{aligned} \quad (31)$$

در رابطه (31) ثابت‌ها به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} \hat{c}_1 &= \frac{A_{11}^0 B_{11}^0 k_s}{\left(k_s l_e^2 B_{11}^0 A_{11}^0 + 12 A_{11}^0 A_{11}^0 - 12 (A_{11}^0)^2 \right)} \\ &\quad \left(12 A_{11}^0 A_{11}^0 - 12 (A_{11}^0)^2 \right) \\ \hat{c}_r &= \frac{k_s l_e^2 B_{11}^0 A_{11}^0}{\left(k_s l_e^2 B_{11}^0 A_{11}^0 + 12 A_{11}^0 A_{11}^0 - 12 (A_{11}^0)^2 \right)} \\ \hat{c}_\nu &= \frac{k_s B_{11}^0 A_{11}^0}{\left(k_s l_e^2 B_{11}^0 A_{11}^0 + 12 A_{11}^0 A_{11}^0 - 12 (A_{11}^0)^2 \right)} \\ &\quad \left(k_s l_e^2 B_{11}^0 A_{11}^0 + 6 A_{11}^0 A_{11}^0 - 6 (A_{11}^0)^2 \right) \\ \hat{c}_\delta &= - \frac{\left(k_s l_e^2 B_{11}^0 A_{11}^0 + 3 A_{11}^0 A_{11}^0 - 3 (A_{11}^0)^2 \right)}{\left(k_s l_e^2 B_{11}^0 A_{11}^0 + 12 A_{11}^0 A_{11}^0 - 12 (A_{11}^0)^2 \right)} \\ \hat{c}_\epsilon &= \frac{\left(k_s l_e^2 B_{11}^0 A_{11}^0 - 6 A_{11}^0 A_{11}^0 + 6 (A_{11}^0)^2 \right)}{\left(k_s l_e^2 B_{11}^0 A_{11}^0 + 12 A_{11}^0 A_{11}^0 - 12 (A_{11}^0)^2 \right)} \\ \hat{c}_\nu &= \frac{\left(-2 k_s l_e^2 B_{11}^0 A_{11}^0 - 12 A_{11}^0 A_{11}^0 + 12 (A_{11}^0)^2 \right)}{\left(k_s l_e^2 B_{11}^0 A_{11}^0 + 12 A_{11}^0 A_{11}^0 - 12 (A_{11}^0)^2 \right)} \\ \hat{c}_\lambda &= \frac{\left(\nu k_s l_e^2 B_{11}^0 A_{11}^0 - 12 A_{11}^0 A_{11}^0 + 12 (A_{11}^0)^2 \right)}{\left(k_s l_e^2 B_{11}^0 A_{11}^0 + 12 A_{11}^0 A_{11}^0 - 12 (A_{11}^0)^2 \right)} \end{aligned} \quad (32)$$

با جای‌گذاری رابطه (23) و نیز در نظر گرفتن

$$\delta \phi(x) = N_{\phi i}(x) \quad \text{و} \quad \delta \psi(x) = N_{\psi i}(x), \quad \delta w(x) = N_{wi}(x)$$

در معادلات حاکم بر مسئله (روابط (21))، معادلات تعادل سیستم به صورت رابطه (33) به دست می‌آیند [15]:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=1}^m K_{ij}^{11} u_j + \sum_{j=1}^n K_{ij}^{1r} w_j + \sum_{j=1}^p K_{ij}^{1r} \psi_j \right) - F_i^1 &= 0 \\ \left(\sum_{j=1}^m K_{ij}^{r1} u_j + \sum_{j=1}^n K_{ij}^{rr} w_j + \sum_{j=1}^p K_{ij}^{rr} \psi_j \right) + \sum_{j=1}^n G_{ij}^{rr} w_j - F_i^r &= 0 \\ \left(\sum_{j=1}^m K_{ij}^{r1} u_j + \sum_{j=1}^n K_{ij}^{rr} w_j + \sum_{j=1}^p K_{ij}^{rr} \psi_j \right) - F_i^r &= 0 \end{aligned} \quad (33)$$

در روابط فوق ضرایب میدان جابه‌جایی بدین صورت تعریف می‌شوند:

جدول ۱- مشخصات هندسی نانوتیر کامپوزیتی

h	L	b
۱۷/۶ nm	۲۰h	۲h

با جای گذاری رابطه (۴۰) در معادله (۳۹) و ساده سازی روابط،

رابطه زیر حاصل می شود:

$$[K_m]\{\bar{q}_d\} + [G_{dd}]\{\bar{q}_d\} = \{F_m\} \quad (41)$$

که $[K_m]$ و $\{F_m\}$ به ترتیب ماتریس سختی و بردار نیرویی اصلاح شده هستند که به صورت زیر تعریف می شوند:

$$[K_m] = [K_{dd}] - [K_{d\phi}][K_{\phi\phi}]^{-1}[K_{\phi d}] \quad (42)$$

$$\{F_m\} = \{f_d\} - [K_{d\phi}][K_{\phi\phi}]^{-1}\{f_\phi\}$$

به دلیل وجود ترم های غیرخطی برای رسیدن به همگرایی از روش تکرار نیوتن-رافسون استفاده می شود. این روش مراحل زیر برای رسیدن به همگرایی استفاده می شود:

- حذف ترم های خطی و محاسبه پارامترهای خطی سیستم.
- محاسبه پارامترهای غیرخطی با استفاده از مقادیر خطی به دست آمده از بند ۱.
- تکرار نتایج تا رسیدن به همگرایی.

۴- بحث و تفسیر نتایج

در این بخش، به تحلیل غیرخطی کماتش الکتروترنومکانیکی نانوتیر کامپوزیتی تقویت شده با توزیع های مختلف نانولوله نیتريد-بور با در نظر گرفتن نقص هندسی اولیه براساس تئوری الاستیسیته غیرمحملی با استفاده از روش المان محدود پرداخته می شود. تأثیر نقص هندسی اولیه، توزیع مختلف نانولوله نیتريد-بور، بستر الاستیک، ضریب غیرمحملی، ضریب رعنائی و میدان الکتریکی بر بار کماتش بحرانی نانوتیر کامپوزیتی مورد بررسی قرار می گیرد. مشخصات هندسی و مکانیکی نانوتیر کامپوزیتی در جداول های (۱) و (۲) آمده است.

ماتریس کماتش

$$G_{ww}^l = P_M \int_0^L \frac{dN_{wi}}{dx} \frac{dN_{wj}}{dx} dx$$

$$G_{ww}^{nl} = -P_M (e, a)^\gamma \int_0^L \frac{d^\gamma N_{wi}}{dx^\gamma} \frac{d^\gamma N_{wj}}{dx^\gamma} dx$$

$$G_{\psi w}^{nl} = -P_M (e, a)^\gamma \int_0^L \frac{dN_{\psi i}}{dx} \frac{d^\gamma N_{wj}}{dx^\gamma} dx$$

$$G_{w\psi}^{nl} = -P_M (e, a)^\gamma \int_0^L \frac{d^\gamma N_{wi}}{dx^\gamma} \frac{dN_{\psi j}}{dx} dx \quad (36)$$

فرم ماتریسی رابطه (۳۳) به صورت زیر ارائه می شود:

$$[k]\{\bar{q}\} + [G]\{\bar{q}\} = \{f\} \quad (37)$$

که در آن $[k]$ ، $[G]$ و $\{f\}$ به ترتیب ماتریس های سختی، کماتش و بردار نیروی خارجی هستند. ماتریس سختی به صورت زیر تعریف می شود:

$$[k] = [k]^{Linear} + [k]^{Nonlinear} \quad (38)$$

$\{\bar{q}\}$ شامل دو بخش یکی مربوط به درجات آزادی جابه جایی $\{\bar{q}_d\}$ و دیگری $\{\bar{q}_\phi\}$ مؤلفه مربوط به پتانسیل الکتریکی است، بردار $\{f\}$ نیز به همین صورت قابل تفکیک است. بر این اساس شکل ماتریسی معادلات حاکم به صورت زیر نوشته می شود:

$$\begin{bmatrix} [K_{dd}] & [K_{d\phi}] \\ [K_{\phi d}] & [K_{\phi\phi}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\bar{q}_d\} \\ \{\bar{q}_\phi\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [G_{dd}] & [0] \\ [0] & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\bar{q}_d\} \\ \{\bar{q}_\phi\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{f_d\} \\ \{f_\phi\} \end{Bmatrix} \quad (39)$$

همان طور که از رابطه (۳۹) مشهود است عبارات مربوط به نیروی محوری برای پتانسیل الکتریکی برابر با صفر است. از سطر دوم رابطه (۳۹)، $\{\bar{q}_\phi\}$ به صورت زیر محاسبه می شود:

$$[K_{\phi d}]\{\bar{q}_d\} + [K_{\phi\phi}]\{\bar{q}_\phi\} = \{f_\phi\} \Rightarrow \{\bar{q}_\phi\} = [K_{\phi\phi}]^{-1}(\{f_\phi\} - [K_{\phi d}]\{\bar{q}_d\}) \quad (40)$$

جدول ۲- مشخصات مکانیکی نانوتیر کامپوزیتی

مقدار	کمیت	مقدار	کمیت	مقدار	کمیت
۳/۵۹	E_m, GPa	۱/۸	$E_{\text{BNNT}}, \text{TPa}$	۰/۱۷	V_{BNNT}^*
۰/۳۴	v_m	۲۳۰۰	$P_{\text{BNNT}}, \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$	$\rho_m, \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$	
۱/۶۲۶	η_r	۰/۱۴۲	η_l	۰/۳۴	v_{BNNT}
۰/۹۵	$e, \frac{\text{C}}{\text{m}^2}$	۱۰-۵	$k_g, \frac{\text{N}}{\text{m}}$	۱۰۱۲	$k_w, \frac{\text{N}}{\text{m}^3}$

جدول ۳- مشخصات مکانیکی نانوتیر کامپوزیتی

پارامتر	مقدار عددی	پارامتر	مقدار عددی	پارامتر	مقدار عددی
V_{CNT}^*	۰/۱۲	$E_{\text{CNT}}, \text{GPa}$	۶۰۰	E_m, GPa	۲/۵
$\rho_m, \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$	۱۹۰۰	$\rho_{\text{CNT}}, \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$	۱۴۰۰	v_m	۰/۳
V_{CNT}	۰/۱۹	η_l	۱/۲۸۳۳	η_r	۱/۰۵۵۶
$G_{12}^{\text{CNT}}, \text{GPa}$	۱۷/۲	$k_w, \frac{\text{N}}{\text{m}^3}$	۱۰۱۲	$k_g, \frac{\text{N}}{\text{m}}$	۱۰-۵

جدول ۴- بار کمانش بحرانی بدون بعد، بدون در نظر گرفتن اثرات پارامتر مقیاس کوچک [۲۳]

FG-X		UD		$V_{\text{CNT}}^* = 0/12, \frac{L}{h} = 15$	
درصد خطا	مرجع [۲۳]	تحقیق حاضر	درصد خطا	مرجع [۲۳]	تحقیق حاضر
۲/۰۲	۰/۲۴۵۹۳	۰/۲۴۱۰۶	۱/۱۴	۰/۲۱۳۹۵	۰/۲۱۱۵۳

محدود محاسبه شده و با نتایج به دست آمده توسط یاس و صمدی [۲۳] مقایسه می شود. نتایج حاصل از تحقیق حاضر با نتایج ارائه شده توسط یاس و صمدی [۲۳] تطابق خوبی دارند.

همچنین برای اعتبارسنجی و صحت نتایج حاصل از تحقیق، بار کمانش بحرانی بدون بعد با در نظر گرفتن اثرات مقیاس کوچک در غیاب اثرات پیزوالکتریک برای حالت ایزوتروپیک در جدول (۵) آورده شده است نتایج حاصل از این پژوهش با نتایج به دست آمده توسط سیمسک و یورکو [۶] تطابق بسیار خوبی دارند. همچنین در جدول (۶) بار کمانش بحرانی بدون

بار کمانش بحرانی نانوتیر کامپوزیتی بدون بعد به صورت زیر تعریف می شود:

$$\bar{P}_M = \frac{P_M}{A_{110}}, \quad A_{110} = b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E_m dz \quad (43)$$

مشخصات مکانیکی نانوتیر کامپوزیتی استفاده شده برای مقایسه نتایج و اعتبارسنجی در جدول (۳) آمده است.

در جدول (۴)، بار کمانش بحرانی بدون بعد نانوتیر کامپوزیتی در غیاب اثرات مقیاس کوچک برای دو نوع توزیع مختلف نانولوله و شرایط مرزی دوسر گیردار به روش اجزاء

جدول ۵- بار کمانش بحرانی بدون بعد با در نظر گرفتن اثرات پارامتر مقیاس کوچک در غیاب اثرات پیزوالکتریک برای حالت ایزوتروپیک [۲۵]

L/h=۲۰		L/h=۱۰		L/h
درصد خطا	تحقیق حاضر	مرجع [۶]	درصد خطا	مرجع [۶]
۰/۹۵۸۹	۹/۴۷۹۶	۹/۵۷۰۵	۰/۰۴۴	۸/۷۵۸۲
				$e_0 a = 1 \text{ nm}$ $E_1 = 1 \text{ TPa}$ $\nu = 0/3$ $k_s = \frac{5}{6}$

جدول ۶- بار کمانش بحرانی بدون بعد با در نظر گرفتن اثرات پارامتر مقیاس کوچک و اثرات پیزوالکتریک [۲۷ و ۲۸]

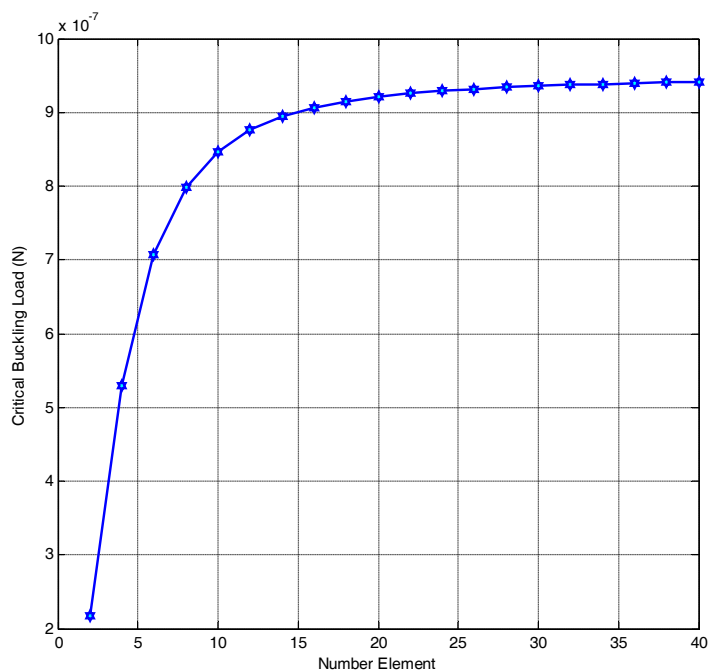
S-S		C-C		$\frac{L}{h} = 16, \frac{e_0 a}{L} = 0/1$
تحقیق حاضر	مرجع [۲۸]	مرجع [۲۷]	تحقیق حاضر	مرجع [۲۷]
۰/۰۰۲۹۲۶	۰/۰۰۲۹۲۲	۰/۰۰۲۹	۰/۰۰۸۷۶۲	۰/۰۰۸۸
				$\Delta T = 0$ $V_0 = 0$

جدول ۷- بار کمانش بحرانی بدون بعد به ازای پارامتر نقص هندسی مختلف و شرط مرزی دو سر گیردار

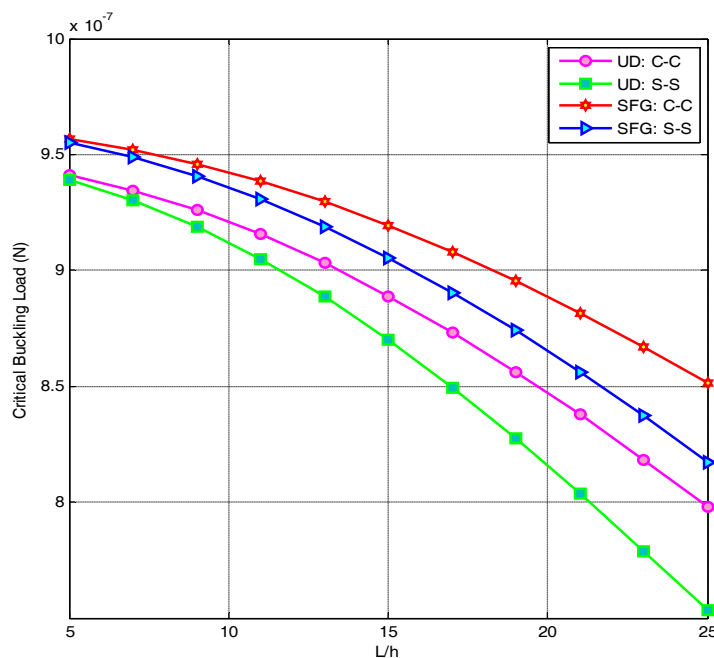
$\mu = 0/3$	$\mu = 0/2$	$\mu = 0/1$	$\mu = 0$	$\frac{L}{h} = 10, e_0 a = 2 \text{ nm}$
$9/3510 \times 10^{-7}$	$9/3184 \times 10^{-7}$	$9/2898 \times 10^{-7}$	$9/2653 \times 10^{-7}$	

افزایش تعداد المان‌ها مقدار بار کمانش بحرانی سیستم افزایش پیدا کرده و در نهایت به یک نقطه همگرا می‌شود. همان‌طوری که از شکل مشاهده می‌شود، تعداد المان‌های لازم برای همگرایی سیستم مورد نظر برابر با ۳۵ المان است. در شکل (۶) اثر تغییرات بار کمانش بحرانی به‌ازای شرایط مرزی تکیه‌گاه گیردار و تکیه‌گاه ساده برای توزیع‌های UD و $e_0 a = 0/5 \text{ nm}$ براساس تئوری غیرمحل‌ی الاستیسیته نشان داده شده است. با توجه به این شکل با افزایش نسبت طول به ضخامت، بار کمانش بحرانی نانوتیر کامپوزیتی کاهش می‌یابد. همچنین در بین توزیع‌های مختلف نانولوله نیتريد- بور توزیع SFG بیشترین مقدار بار کمانش بحرانی را به‌ازای شرط مرزی تکیه‌گاه گیردار به خود اختصاص می‌دهد، بنابراین سفتی در این حالت بیشتر از حالت‌های دیگر بوده و پایداری سیستم افزایش پیدا می‌کند.

بعد با در نظر گرفتن اثرات پارامتر مقیاس کوچک و پیزوالکتریک به طور همزمان برای شرایط مرزی مختلف محاسبه شده و با نتایج حاصل از مراجع [۲۷ و ۲۸] مقایسه شده است. اختلاف مشاهده شده در نتایج به دلیل اختلاف در پتانسیل الکتریکی در نظر گرفته شده است ولی در عین حال نتایج حاصل از تحقیق حاضر با نتایج به‌دست آمده توسط مراجع [۲۷ و ۲۸] تطابق خوبی دارد. جدول (۷) مقدار بار کمانش بحرانی را به‌ازای پارامتر نقص هندسی مختلف برای شرط مرزی دو سر گیردار و $L/h = 10, e_0 a = 2 \text{ nm}$ همان‌طوری که از جدول مشاهده می‌شود با افزایش دامنه نقص هندسی بار کمانش بحرانی افزایش پیدا می‌کند. در شکل (۵) همگرایی روش اجزاء محدود برای نانوتیر کامپوزیتی مورد بررسی قرار می‌گیرد. مطابق این شکل با



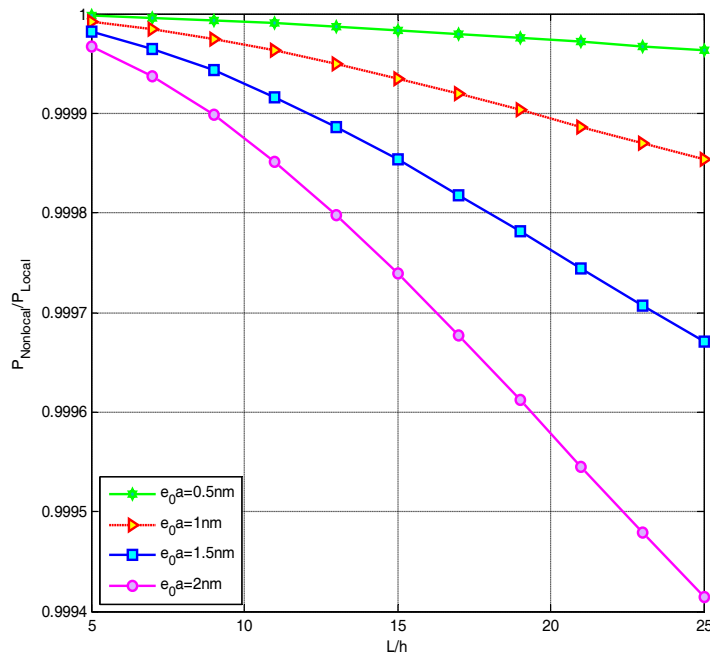
شکل ۵- بررسی همگرایی روش اجزاء محدود برای بار کمانش بحرانی نانوتیر کامپوزیتی



شکل ۶- تأثیر شرایط مرزی مختلف به‌ازای توزیع مختلف نانولوله نیترید- بور بر بار کمانش بحرانی نانوتیر کامپوزیتی

ضرایب غیرمحلی مختلف و چیدمان UD نانولوله نیترید- بور را نشان می‌دهد. در این منحنی‌ها مشاهده می‌شود که به‌ازای

شکل (۷) منحنی‌های بار کمانش بحرانی غیرمحلی به بار کمانش بحرانی محلی برحسب افزایش طول به ضخامت به‌ازای



شکل ۷- اثر تغییرات ضریب غیرمحملی به‌ازای تغییرات نسبت طول به ضخامت بر بار کمانش بحرانی نانوتیر کامپوزیتی

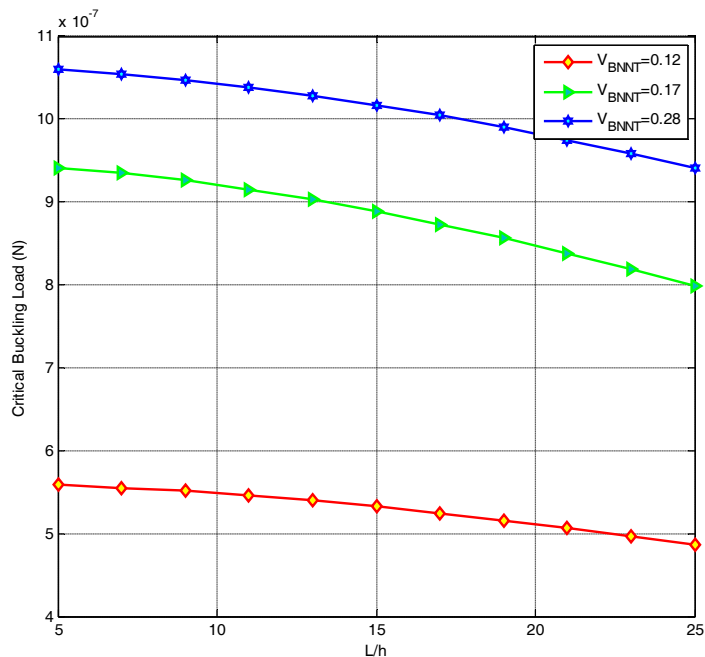
درصد حجمی مختلف نانولوله‌ها را نشان می‌دهد. در منحنی‌ها مشاهده می‌شود بار کمانش بحرانی با افزایش درصد حجمی نانولوله‌ها افزایش می‌یابد و در نتیجه باعث افزایش سفتی نانوتیر کامپوزیتی و افزایش پایداری سیستم می‌شود.

شکل (۱۰) نمودار بار کمانش بحرانی نانوتیر کامپوزیتی برحسب نسبت طول به ضخامت در دو حالت مختلف در نظر گرفتن نانولوله‌ها به‌صورت کرنی و نیتريد-بور را نشان می‌دهد. در صورتی که میدان الکتریکی بر یک سازه اعمال شود برای آنکه عکس‌العمل‌ها در مقابل بارهای اعمالی قابل مشاهده باشد باید از موادی با جنس خاص استفاده شود. نانولوله‌های نیتريد-بور از جمله این مواد هستند (وقتی که میدان الکتریکی بر یک سازه اعمال شود از نانولوله‌های کرنی به خاطر آن که قادر نیستند در مقابل بارهای الکتریکی از خود عکس‌العمل نشان دهند نمی‌توان استفاده کرد). در منحنی‌های فوق مشاهده می‌شود که در نظر گرفتن میدان الکتریکی و به تبع آن استفاده از نانولوله‌های نیتريد-بور باعث افزایش سفتی سیستم و در نتیجه

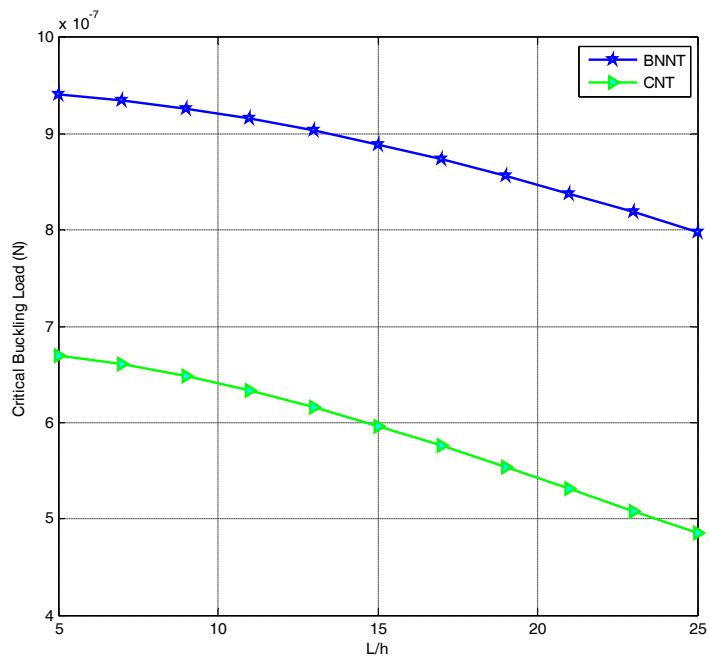
یک ضریب غیرمحملی ثابت، با افزایش نسبت طول به ضخامت نسبت بار کمانش بحرانی غیرمحملی به بار کمانش بحرانی محلی کاهش یافته و با افزایش پارامتر غیرمحملی به‌ازای یک طول ثابت این نسبت کاهش پیدا می‌کند. دلیل آن این است که با افزایش پارامتر غیرمحملی تغییر مکان‌های سازه افزایش یافته که به معنای کاهش سفتی و در نتیجه کاهش بار کمانش بحرانی سیستم است.

شکل (۸) تأثیر بستر الاستیک را بر بار کمانش بحرانی نانوتیر کامپوزیتی برای توزیع UD نانولوله نیتريد-بور در حالتی که $e_0 a = 0/5 \text{ nm}$ نشان می‌دهد. واضح است که با در نظر گرفتن ثابت‌های وینکلر و پاسترناک سفتی نانوتیر کامپوزیتی افزایش یافته و در نتیجه بار کمانش بحرانی افزایش می‌یابد. در واقع بستر الاستیک نشان‌دهنده خاصیت کشسانی محیط اطراف نانوتیر بوده و با در نظر گرفتن آن، پایداری سیستم افزایش می‌یابد.

شکل (۹)، منحنی‌های بار کمانش بحرانی نانوتیر کامپوزیتی تقویت شده با توزیع UD نانولوله‌های نیتريد-بور برای



شکل ۹- تأثیر درصد حجمی نانولوله نیتريد- بور به‌ازای تغييرات نسبت طول به ضخامت بر بار کماتش بحرانی نانوتير کامپوزیتی



شکل ۱۰- تأثیرانواع مختلف نانولوله به‌ازای تغييرات نسبت طول به ضخامت بر بار کماتش بحرانی نانوتير کامپوزیتی

۵- بحث و نتیجه‌گیری

افزایش پایداری نانوتير کامپوزیتی می‌شود و سفتی هم رابطه مستقیمی با بار کماتش بحرانی سیستم دارد. در این تحقیق تحلیل کماتش غیرخطی نانوتير کامپوزیتی تقویت

بحرانی می‌شود.

۵- بار کمانش بحرانی در تکیه‌گاه گیردار بیشتر از تکیه‌گاه ساده است. علت آن این است که در تکیه‌گاه گیردار تیر سفت‌تر شده در نتیجه بار کمانش بحرانی آن افزایش یافته و در نهایت پایداری سیستم افزایش می‌یابد.

۶- استفاده از نانولوله‌های نیتريد- بور و در نظر گرفتن میدان الکتریکی باعث افزایش سفتی سیستم و در نتیجه افزایش بار کمانش بحرانی نانوتیر کامپوزیتی می‌شود و به واسطه آن پایداری سیستم افزایش پیدا می‌کند.

۷- با افزایش درصد حجمی نانولوله‌ها بار کمانش بحرانی نانوتیر کامپوزیتی افزایش می‌یابد. در نتیجه سفتی نانوتیر کامپوزیتی افزایش یافته و باعث افزایش پایداری سیستم می‌شود.

۸- با افزایش پارامتر غیرمحلّی تغییر مکان‌های سازه افزایش یافته که به معنای کاهش سفتی و یا کاهش بار کمانش بحرانی سیستم است.

تشکر و قدردانی

از ستاد ویژه توسعه فناوری نانو و از معاونت پژوهشی دانشگاه کاشان طی قراردادی به شماره ۴۶۳۸۵۵/۹ به خاطر حمایت مالی تشکر و قدردانی می‌شود.

شده با توزیع‌های مختلف نانولوله نیتريد- بور با در نظر گرفتن نقص هندسی اولیه واقع بر بستر الاستیک با استفاده از تئوری غیرمحلّی ارینگن مورد بررسی قرار گرفت. ابتدا میدان جابه‌جایی و تغییر مکان نانوتیر کامپوزیتی به دست آمد. سپس روابط کرنش- تغییر مکان با استفاده از میدان جابه‌جایی حاصل، استخراج شد. در نهایت برای حل معادلات حاکم بر نانوتیر کامپوزیتی از روش اجزاء محدود استفاده شد. براساس نتایج به دست آمده می‌توان بیان کرد:

۱- تعداد المان‌های لازم برای همگرایی سیستم مورد نظر ۳۵ المان است.

۲- اثرات پارامتر مقیاس کوچک ماده روی سفتی نانوتیر کامپوزیتی بیشتر از اثرات توزیع‌های مختلف نانولوله نیتريد- بور است.

۳- برای توزیع‌های مختلف نانولوله‌های تک دیواره نیتريد- بور در نانوتیر کامپوزیتی، توزیع‌های UD و FG-X به ترتیب بزرگترین و کوچکترین بار کمانش بحرانی را دارند. لازم به ذکر است که توزیع FG-X، در نواحی بالا و پایین تیر بیشتر از بقیه نواحی است، لذا سفتی تیر نسبت به حالت دیگر افزایش بیشتری داشته و بار کمانش افزایش می‌یابد.

۴- بار کمانش بحرانی با ضرایب وینکلر و پاسترناک رابطه مستقیم دارد و هر چه طول تیر افزایش یابد، اثرات ضرایب بر نانوتیر افزایش پیدا کرده و باعث افزایش بار کمانش

واژه‌نامه

1. uniform distribution
2. symmetrically linear distribution functionally graded or

functionally graded-x

مراجع

1. Wang, B., Zichen, D., Huajiang, O., and Jiayi, Z., "Wave Propagation Analysis in Nonlinear Curved Single-Walled Carbon Nanotubes Based on Nonlocal Elasticity Theory", *Physica E*, Vol. 66, pp. 283-292, 2015.
2. Liew, K. M., Lei, Z. X., and Zhan, L.W., "Mechanical Analysis of Functionally Graded Carbon Nanotube Reinforced Composites: A Review", *Composite Structures*, Vol. 120, pp. 90-97,

- 2015.
3. Mohammadimehr, M., Mohandes, M., and Moradi, M., "Size Dependent Effect on the Buckling and Vibration Analysis of Double-Bonded Nanocomposite Piezoelectric Plate Reinforced by Boron Nitride Nanotube Based on Modified Couple Stress Theory", *Journal of Vibration and Control*, Vol. 22, No. 7, pp. 1790-1807, 2016.
4. Ghorbanpour Arani, A., Maghamikia, S. H.,

- Mohammadimehr, M., and Arefmanesh, A., "Buckling Analysis of Laminated Composite Rectangular Plates Reinforced by SWCNTs using Analytical and Finite Element Method", *Journal of Mechanical Science and Technology*, Vol. 25, pp. 809-820, 2011.
5. Li, Z. M., "Thermal Postbuckling Behavior of 3D Braided Beams with Initial Geometric Imperfection under Different Type Temperature Distribution", *Composite Structures*, Vol. 108, pp. 924-936, 2014.
 6. Simsek, M., and Yurteu, H. H., "Analytical Solutions for Bending and Buckling of Functionally Graded Nanobeams Based on the Nonlocal Timoshenko Beam Theory", *Composite Structures*, Vol. 97, pp. 378-386, 2013.
 7. Mohammadimehr, M., Mohammadimehr, M. A., and Dashti, P., "Size-Dependent Effect on Biaxial and Shear Nonlinear Buckling Analysis of Nonlocal Isotropic and Orthotropic Micro-Plate Based on Surface Stress and Modified Couple Stress Theories using Differential Quadrature Method", *Applied Mathematics and Mechanics*, Vol. 37, pp. 529-554, 2016.
 8. Komijani, M., Esfahani, S. E., Reddy, J. N., Liu, Y. P., and Eslami, M. R., "Nonlinear Thermal Stability and Vibration of Pre/Post-Buckled Temperature and Microstructure- Dependent FGM Beams Resting on Elastic Foundation", *Composite Structures*, Vol. 112, No. 1, pp. 292-307, 2014.
 9. Mohammadi, H., Mahzoon, M., and Mohammadi, M., "Postbuckling Instability of Nonlinear Nanobeam with Geometric Imperfection Embedded in Elastic Foundation", *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, Vol. 76, No. 4, pp. 2005-2016, 2014.
 10. Mohammadimehr, M., and Shahedi, S., "High-Order Buckling and Free Vibration Analysis of Two Types Sandwich Beam Including AL or PVC-Foam Flexible Core and CNTs Reinforced Nanocomposite Face Sheets using GDQM", *Composites Part B: Engineering* Available online 29 September 2016. <http://dx.doi.org/10.1016/j.compositesb.2016.09.040>.
 11. Mohammadimehr, M., Roustavi, B., and Ghorbanpour Arani, A., "Free Vibration of Viscoelastic Double-Bonded Polymeric Nanocomposite Plates Reinforced by FG-SWCNTs using MSGT, Sinusoidal Shear Deformation Theory and Meshless Method", *Composite Structures*, Vol. 131, pp. 654-671, 2015.
 12. Mohammadimehr, M., Salemi, M., and Roustavi, B., "Bending, Buckling, and Free Vibration Analysis of MSGT Microcomposite Reddy Plate Reinforced by FG-SWCNTs with Temperature-Dependent material Properties under Hydro-Thermo-Mechanical Loadings using DQM", *Composite Structures*, Vol. 138, pp. 361-380, 2016.
 13. Wang, B., Deng, Z. C., and Zhang, K., "Nonlinear Vibration of Embedded Single-Walled Carbon Nanotube with Geometrical Imperfection under Harmonic Load Based on Nonlocal Timoshenko Beam Theory", *Applied Mathematics and Mechanics. English Edition*, Vol. 34, No. 3, pp. 269-280, 2013.
 14. Anjomshoa, A., Shahidi, A. R., Hassani, B., and Jomehzadeh, E., "Finite Element Buckling Analysis of Multi-Layered Graphemesheets on Elastic Substrate Based on Nonlocal Elasticity Theory", *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 38, pp. 5934-5955, 2014.
 15. Reddy, J. N., *An Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis*, Oxford University Press, Oxford, New York, 2004.
 16. Ghorbanpour Arani, A., Roustavi, B., and Mohammadimehr, M., "Surface Stress and Agglomeration Effects on Nonlocal Biaxial Buckling Polymeric Nanocomposite Plate Reinforced by CNT using Various Approaches", *Accepted in Advanced Composite Material*, DOI: 10.1080/09243046.2015.1052189, 2015.
 17. Murmu, T., and Pradhan, S. C., "Buckling Analysis of a Single-Walled Carbon Nanotube Embedded in an Elastic Medium Based on Nonlocal Elasticity and Timoshenko Beam Theory and Using DQM", *Physica E*, Vol. 41, pp. 1232-1239, 2009.
 18. Amabilia, M., Karagiozis, K., and Padoussis, M. P., "Effect of Geometric Imperfections on Non-Linear Stability of Circular Cylindrical Shells Conveying fluid", *International Journal of Nonlinear Mech*, Vol. 44, pp. 276-289, 2009.
 19. Mohammadimehr, M. and Alimirzaei, S., "Nonlinear Static and Vibration Analysis of Euler-Bernoulli Composite Beam Model Reinforced by FG-SWCNT with Initial Geometrical Imperfection using FEM", *Structural Engineering and Mechanics*, Vol. 59, pp. 431-454, 2016.
 20. Abdollahi, M., Saidi, A. R., and Mohammadi, M., "Buckling Analysis of Thick Functionally Graded Piezoelectric Plates Based on the Higher-Order Shear and Normal Deformable Theory", *Acta Mechanica*, Vol. 226, pp. 2497-2510, 2015.
 21. Cady, W. G., *Piezoelectricity; an Introduction to the Theory and Applications of Electromechanical Phenomena in Crystals*, McGraw-Hill, New York, 1946.
 22. Moon, W. H., and Hwang, H. J., "Molecular Mechanics of Structural Properties of Boron-Nitride Nanotubes", *Physica E*, Vol. 23, pp. 26-30, 2004.
 23. Yas, M. H., and Samadi, N., "Free Vibrations and Buckling Analysis of Carbon Nanotube-Reinforced Composite Timoshenko Beams on Elastic Foundation", *Journal of Pressure Vessels and Piping*, Vol. 98, pp. 119-128, 2012.
 24. Chakraborty, A., Mahapatra, D. R., and Gopalakrishnan, S., "Finite Element Analysis of

- Free Vibration and Wave Propagation in Asymmetric Composite Beam with Structural Discontinuities”, *Composite Structures*, Vol. 55, pp. 23-36, 2002.
25. Rafiee, M., He, X. Q., and Liew, K. M., “Non-Linear Dynamic Stability of Piezoelectric Functionally Graded Carbon Nanotube Reinforced Composite Plates with Initial Geometric Imperfection”, *International Journal of Non-linear Mechanics*, Vol. 59, pp. 37-51, 2014.
26. Reddy, J. N., “Nonlocal Theories for Bending, Buckling and Vibration of Beams”, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 45, pp. 288-307, 2007.
27. Ansari, R., Faraji Oskouie, M., Gholami, R. and Sadeghi, F., “Thermo-Electro-Mechanical Vibration of Postbuckled Piezoelectric Timoshenko Nanobeams Based on the Nonlocal Elasticity Theory”, *Composites Part B*, Vol. 89, pp. 316-327, 2016.
28. Liu, C., Ke, L. L., Wang, Y., Yang, J., and Kitipornchai, S., “Buckling and Post-buckling of Size-Dependent Piezoelectric Timoshenko Nanobeams Subject to Thermo-electro-Mechanical Loadings”, *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, Vol. 14, p. 1350067, 2014.