

## شبیه‌سازی عددی فروریزش ستون‌های دانه‌ای بر اساس مدل ویسکوپلاستیک وابسته به فشار با استفاده از روش هیدرودینامیک ذرات هموار

سید امیرمسعود صالحی‌زاده و علیرضا شفیعی\*  
دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه یزد

(دریافت مقاله: ۱۳۹۷/۶/۲۵ - دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۷/۱۱/۷)

**چکیده** - مطالعه حاضر، تحلیل عددی پدیده فروریزش ستون‌های مواد دانه‌ای را به کمک روش هیدرودینامیک ذرات هموار و یک رابطه ساختاری محلی پیشنهاد شده توسط ژوپ و همکاران، ارائه می‌دهد. این روابط ساختاری بر پایه ماهیت تراکم جریان توده دانه‌ای به عنوان یک جریان ویسکوپلاستیک بیان می‌شود که ویسکوزیته را به اندازه نرخ کرنش محلی و میدان فشار محلی مرتبط می‌کند. پارامترهای رئولوژی از طریق نتایج تجربی تعیین شده است. یک روش ساده برای منظم‌سازی مقدار ویسکوزیته پیشنهاد شد تا شرایط توقف و سطح آزاد جریان گرانشی که فشار آن صفر است را فراهم سازد. نوسانات فشار به عنوان اشکال اصلی در روش "هیدرودینامیک ذرات هموار تراکم‌پذیر ضعیف" منجر به توزیع نامناسب فشار می‌شود. در این مقاله، یک الگوریتم جدید برای حذف نوسانات غیرفیزیکی با مرتبط کردن دیورژانس سرعت به لاپلاسیان فشار پیشنهاد شده است. شبیه‌سازی‌های صورت گرفته بر پایه الگوریتم پیشنهادی به خوبی دینامیک جریان دانه‌ای مشاهده شده در نتایج تجربی را نشان می‌دهد. ضخامت بیشینه جریان دانه‌ای روی سطح شیب‌دار بر اساس مدل رئولوژی محلی و مقادیر تجربی تعیین شد و با نتایج عددی مقایسه شد. فاصله پیشروی نهایی و شیب نشست به دست آمده از شبیه‌سازی‌ها با مقادیر تعیین شده از آزمایش‌های تجربی کاملاً سازگاری داشت. نتایج نشان می‌دهد که نسبت ستون اولیه نقش مهمی در پخش توده دانه‌ای و شکل نشست نهایی ستون ایفا می‌کند.

واژه‌های کلیدی: روش هیدرودینامیک ذرات هموار تراکم‌پذیر ضعیف، جریان ویسکوپلاستیک، فروریزش جریان دانه‌ای.

## Numerical Simulation of Granular Column Collapses with Pressure-Dependent Viscoplastic Model using the Smoothed Particle Hydrodynamic Method

A. M. Salehizadeh and A. R. Shafiei\*

Department of Mechanical Engineering, Yazd University, Yazd, Iran.

**Abstract:** This paper presents a numerical analysis of granular column collapse phenomenon using a two-dimensional smoothed particle hydrodynamics model and a local constitutive law proposed by Jop et al. This constitutive law, which is based

\*: مسئول مکاتبات، پست الکترونیکی: arshafiei@yazd.ac.ir

on the viscoplastic behaviour of dense granular material flows, is characterized by an apparent viscosity depending both on the local strain rate and the local pressure. The rheological parameters are directly derived from the experiments. A simple proposed regularization method used in the viscosity relation to reproduce the stopping condition and the free surface of a granular flow where the pressure is disappeared. Pressure oscillation, as the main disadvantage of the weakly compressible SPH method, leads to an inaccurate pressure distribution. In this research, a new algorithm is proposed to remove the nonphysical oscillations by relating the divergence of velocity to the Laplacian of pressure. The simulations based on the proposed SPH algorithm satisfactorily capture the dynamics of gravity-driven granular flows observed in the experiments. The maximum thickness of a granular flowing on a rough inclined plane is obtained based on the local rheology model and compared with the experimental results. The run-out distances and the slopes of the deposits in the simulations showed a good agreement with the values found in the experiments. The results of the simulation proved that the initial column ratio played an important role in spreading the granular mass.

**Keywords:** Dense Granular Material, Smoothed Particle Hydrodynamics, Pressure Dependent Visco-Plastic.

## فهرست علائم

|   |                             |   |               |
|---|-----------------------------|---|---------------|
| بردار سرعت                                | $\bar{v}$                   | نسبت ستون (نسبت ارتفاع به عرض ستون)               | $a_s$         |
| تابع هموار کرنل                           | $W_h( r-r' )$               | سرعت صوت  | $c$           |
| ضریب ویسکوزیته مصنوعی                     | $\alpha_{\Pi}$              | عدد بی بعد کورانت                                 | $C_{CFL}$     |
| زاویه سطح شیب دار                         | $\theta$                    | ثابت اسماگورینسکی                                 | $C_s$         |
| تانسور اصلاح کننده اپراتور لاپلاسیان      | $\Gamma$                    | قطر دانه  | $D$           |
| اندازه نرخ کرنش                           | $ \dot{\gamma} $            | فاصله متعامد از دیواره                            | $d$           |
| ویسکوزیته جنبشی                           | $\nu$                       | شتاب گرانش  | $\bar{g}$     |
| ویسکوزیته ادی                             | $\nu_s$                     | طول هموارسازی تابع کرنل                           | $h$           |
| ضریب اصطکاک بیشینه                        | $\mu_v$                     | ارتفاع اولیه ستون ماده دانه ای                    | $H_{max}$     |
| ضریب اصطکاک کمینه                         | $\mu_s$                     | ارتفاع اولیه ستون                                 | $h_s$         |
| ویسکوزیته دینامیکی                        | $\mu^t$                     | ارتفاع نهایی ستون                                 | $h_{\infty}$  |
| چگالی جرمی                                | $\rho$                      | ضخامت نشست در وضعیت پایدار                        | $h_s(\theta)$ |
| چگالی جرمی دانه                           | $\rho_s$                    | عدد اینرسی  | $I$           |
| کسر حجمی                                  | $\phi$                      | عدد اینرسی مربوط به جریان با ضخامت $h$            | $\bar{I}$     |
| زمان لازم برای کاهش ضریب ویسکوزیته مصنوعی | $\zeta$                     | عدد اینرسی مربوط به جریان یکنواخت پایا در دور دست | $I_0$         |
| تانسور نرخ کرنش                           | $\varepsilon^{\alpha\beta}$ | مدول بالک   | $K$           |
| فاصله محدود کننده لب                      | $\Delta$                    | تانسور نرمال کننده گرادیان تابع کرنل              | $L$           |
| اندازه گام زمانی                          | $\Delta t$                  | جرم   | $m$           |
| کرنش حجمی                                 | $\Delta V/V$                | میدان فشار  | $p$           |
| بردار گرادیان تابع هموار کرنل             | $\nabla_a W_{ab}$           | بردار مکانی                                       | $\bar{r}$     |
| حجم                                       | $V$                         | نیم عرض ابتدایی ستون                              | $r_s$         |
| ویسکوزیته مصنوعی                          | $\Pi_{ab}$                  | نیم عرض نهایی ستون                                | $r_{\infty}$  |

## ۱- مقدمه

حوزه های مختلف از جمله ژئوفیزیک، فیزیک و صنعت برخوردار است. تحقیقات نظری و تجربی زیادی به این

رفتار مکانیکی جریان مواد دانه ای خشک از اهمیت زیادی در

موضوع، به‌ویژه برای تعیین خواص مکانیکی جریان دانه‌ای، اختصاص داده شده است. یکی از ویژگی‌های مهم مواد دانه‌ای این است که می‌توانند به‌صورت آزاد، مانند سیال حرکت کنند، به‌گونه‌ای که قادر به جابه‌جایی در فواصل زیاد و متغیر هستند. برحسب سرعت و شرایط جریان مواد دانه‌ای سه ماهیت زیر برای آن در نظر گرفته می‌شود:

(الف) ماهیت شبه استاتیکی یا پلاستیک برای سرعت‌های پایین  
(ب) ماهیت ویسکوز یا سیال گونه (وضعیت متراکم) که در آن ذرات با اندرکنش‌های تماسی جریان می‌یابند.

(ج) ماهیت گازی برای مواقعی که ذرات دانه‌ای دارای تغییرات سرعت بالا هستند و اندرکنش اصلی ذرات، برخورد دو به دو است.

نظریه‌های توصیف شده برای جریان مواد دانه‌ای در هر ماهیت متفاوت از یکدیگر هستند. با این وجود به‌دلیل فراوانی کاربرد، تحقیق درباره ماهیت ویسکوز برای جریان دانه‌ای مورد توجه بیشتری است. پخش و سقوط ستون‌های شن و ماسه و دیگر مواد دانه‌ای روی یک سطح صاف با استفاده از روش‌های آزمایشگاهی و عددی بررسی شده‌اند. لاژنس [۱ و ۲] و لوب [۳-۵] مطالعات تجربی متعددی را در رابطه با فروپاشی جریان‌های دانه‌ای روی سطح افقی کانال انجام دادند. همچنین پولیگن [۶] و مانجینی [۷] حرکت مواد دانه‌ای را روی یک سطح شیب‌دار با بستر قابل فرسایش به‌طور تجربی بررسی کرده‌اند.

روش‌های عددی مختلفی برای شبیه‌سازی جریان دانه‌ای استفاده شده است. مدل‌های رئولوژی پیوسته ارائه شده توسط داکروز [۸] و ژوپ [۹] و همچنین رابطه تعمیم‌یافته غیرمحلی توسط کامرین [۱۰] برای جریان دانه‌ای، پیشرفت‌های قابل توجهی در مقایسه با مدل معمول دراکر-پراگر برای مدل کردن مسائل با نرخ کرنش بالا، داشته‌اند. از مدل پیشنهادی داکروز و ژوپ در روش حجم سیال توسط لاگری [۱۱] و روش المان محدود توسط کامرین [۱۲] برای مدل کردن جریان دانه‌ای استفاده شده است. هر دو روش برای مسائل ساده نتایج قابل

روش‌های عددی در مهندسی، سال ۳۸، شماره ۲، زمستان ۱۳۹۸

قبولی می‌دهند، با وجود این، روش حجم سیال در مسائل با گسیختگی زیاد دچار مشکل شده و نمی‌تواند نواحی ایستا را تعیین کند، همچنین در روش المان محدود وقتی که اعوجاج مش بزرگ شود، خطاهای عددی زیاد می‌شود.

روش‌های ذره‌ای بدون مش، روش‌های کارآمدی در حل مسائل سطوح آزاد با تغییر شکل بالا، محسوب می‌شوند. روش المان گسسته ارائه شده توسط کاندال [۱۳] به‌عنوان یک روش بدون مش، معادلات کلاسیک حرکت را به‌صورت جداگانه برای هر ذره حل می‌کند ولی این روش برای حل مسائل واقعی در مقیاس‌های بزرگ ناکارآمد است.

روش هیدرودینامیک ذرات هموار<sup>۱</sup> (SPH) به‌عنوان یک روش لاگرانژی بدون مش، ارائه شده توسط لوسی [۱۴] و گینگولد [۱۵] در محدوده وسیعی از مسائل همچون پاسخ دینامیکی مواد [۱۶ و ۱۷]، جریان آشفته [۱۸]، جریان سطوح آزاد [۱۹] به‌خوبی مورد استفاده قرار گرفته است.

در روش SPH برای مدل‌سازی جریان‌های تراکم‌ناپذیر، از یک معادله حالت مناسب که تغییرات فشار را به تغییرات چگالی ارتباط می‌دهد، استفاده شده است. این رویکرد به‌عنوان روش هیدرودینامیک ذرات هموار تراکم‌پذیر ضعیف شناخته شده است. ناپایداری‌های عددی در روش SPH روی سطح آزاد در نتیجه ناکامل بودن دامنه پوشش تابع کرنل و خطا در تعیین دقیق سطح آزاد، ایجاد می‌شود. در این مطالعه، الگوریتم جدیدی برای مدل‌سازی جریان‌های سطح آزاد با نتایج دقیق و پایدار، پیشنهاد می‌شود. در الگوریتم پیشنهادی، با استفاده از معادله پایستگی جرم، دیورژانس سرعت به لاپلاسیان فشار مرتبط می‌شود. درگیری سرعت-فشار، حذف نوسانات غیرفیزیکی را فراهم می‌کند. علاوه بر این، گرادیان تابع درون‌یابی با استفاده از تانسور اصلاحی مشتقات مرتبه اول یکپارچه شده است. گرچه این بهبودها به‌طور جداگانه مورد بررسی قرار گرفته است، استفاده همزمان از این اصلاحات منجر به یک روش قوی و سازگار می‌شود.

یک راه برای توصیف جریان‌های دانه‌ای خشک، استفاده از

که  $\rho$  چگالی،  $\vec{V}$  عملگر گرادیان،  $\vec{v}$  میدان سرعت،  $p$  فشار،  $\vec{g}$  شتاب گرانشی،  $v$  ویسکوزیته جنبشی و  $v_s$  ویسکوزیته ادی است. آشفتگی یک عامل مؤثر در سیالات ویسکوپلاستیک با ویسکوزیته وابسته به فشار با عدد رینولدز بالا است. مدل آشفتگی مقیاس ذرات کوچک<sup>۴</sup> [۲۶] در چندین مسئله سطح آزاد در SPH مورد استفاده قرار گرفته است. با استفاده از نگرش اسماکورینسکی، ویسکوزیته ادی به فرم زیر بیان می‌شود:

$$v_s = (C_s \Delta)^2 \sqrt{2\varepsilon^{\alpha\beta}} : \varepsilon^{\alpha\beta} \quad (5)$$

که  $\varepsilon^{\alpha\beta}$  تانسور نرخ کرنش،  $\Delta$  فاصله محدود کننده و  $C_s$  ثابت اسماکورینسکی است که معمولاً در محدوده ۰/۰۷ تا ۰/۲۵ است.

در روش SPH، به منظور مدل‌سازی رفتار مواد دانه‌ای خشک، از تکنیک تراکم‌پذیری مصنوعی<sup>۵</sup> استفاده می‌شود. فشار به‌طور معمول با استفاده از معادله حالت که تابعی از تغییر چگالی است محاسبه می‌شود. از این‌رو، معادله فشار برای ماده دانه‌ای از قانون هوک تبعیت می‌کند [۲۷]:

$$p = K \frac{\Delta V}{V} = K \left( \frac{\rho}{\rho_0} - 1 \right) \quad (6)$$

که  $K$  مدول بالک،  $\Delta V/V$  کرنشی حجمی و  $\rho_0$  چگالی اولیه ماده دانه‌ای است. مقدار  $K$  باید به‌گونه‌ای در نظر گرفته شود که شرایط تراکم‌ناپذیری را امکان‌پذیر کند. در این مطالعه مقدار  $K = 50 \rho_0 g H_{max}$  انتخاب شد (۵۰ برابر فشار اولیه بیشینه) که  $H_{max}$  ارتفاع اولیه ستون ماده دانه‌ای است.

با استفاده از تقریب ذره‌ای در بیان SPH، فرم گسسته معادله پیوستگی برای ذره به‌صورت زیر در می‌آید:

$$\frac{d\rho_a}{dt} = \rho_a \sum_b V_b \vec{v}_{ab} \cdot \vec{\nabla}_a W_{ab} \quad (7)$$

که  $\vec{v}_{ab} = \vec{v}_a - \vec{v}_b$  سرعت نسبی بین دو ذره  $a$  و  $b$  و  $\vec{\nabla}_a W_{ab}$  گرادیان تابع کرنل است. به‌منظور افزایش دقت به‌ویژه در سطوح آزاد از گرادیان تابع کرنل نرمال شده استفاده می‌شود. گرادیان تابع کرنل یکه شده به‌فرم زیر بیان می‌شود [۲۸]:

$$\nabla W_{ab}^c = L(r_a) \nabla W_{ab} \quad (8)$$

که

معادلات ساختاری است که آنها را به‌عنوان یک محیط پیوسته و تراکم‌ناپذیر بیان می‌کند، به‌گونه‌ای که در آن تنش برشی بر مبنای جابه‌جایی ذرات محاسبه می‌شود. لیگل [۲۰] و پاسکولی [۲۱] جریان گل را با استفاده از مفهوم سیال بینگهام<sup>۲</sup> به‌کمک روش SPH مدل کردند. بویی [۲۲] روابط الاستیک-پلاستیک را برای مدل‌سازی جریان‌های گسیختگی خاک استفاده کرد و انگوئن [۲۳] با طرح منظم‌سازی مؤلفه‌های تنش-کرنش<sup>۳</sup>، نتایج را ارتقا داد. بر اساس مطالعات تجربی صورت گرفته توسط پولیگن [۲۴] یک رابطه ساختاری محلی پیشنهاد و نشان داده شد که در توصیف جریان دانه‌ای متراکم مؤثر است. این مدل نسبت تنش مماسی به تنش عمودی را به عدد اینرسی بی‌بعد که بیانگر وضعیت محلی محیط دانه‌ای است، ارتباط می‌دهد.

## ۲- روش هیدرودینامیک ذرات هموار

در بیان SPH هر متغیر واقع در نقطه  $r$  به‌وسیله یک تابع هموارسازی کرنل با طول هموار به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$A(r) \approx \int_{\Omega} A(r') W(|r-r'|, h) dr' \quad (1)$$

که  $\Omega$  دامنه پوشش است. تقریب ذره‌ای از معادله بالا برای ذره به‌فرم رابطه (۲) در می‌آید:

$$A(r_a) \approx \sum_b V_b A(r_b) W_h(|\vec{r}_{ab}|) \quad (2)$$

که  $V$  حجم ذره،  $h$  طول هموارسازی که ناحیه تأثیر اطراف یک ذره را مشخص می‌کند و  $\vec{r}_{ab} = \vec{r}_a - \vec{r}_b$  بردار فاصله بین دو ذره  $a$  و  $b$  است ( $b$  ذره‌ای در دامنه پوشش ذره  $a$ ). در این مقاله از تابع کرنل بی-اسپلاین با دامنه پوشش  $2h$  استفاده شده است [۲۵].

ماده دانه‌ای به‌عنوان یک سیال که با یک جریان میدانی حرکت می‌کند، در نظر گرفته شده است. بنابراین معادلات بقای جرم و بقای اندازه حرکت مکانیک کلاسیک به آن اعمال می‌شود که فرم لاگرانژی آن به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \quad (3)$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + (v + v_s) \nabla^2 \vec{v} + \vec{g} \quad (4)$$

$$(\nabla \cdot \mu^t \nabla \bar{v})_a \approx \sum_b \wedge V_b \left( \frac{\gamma \mu_a^t \mu_b^t}{\mu_a^t + \mu_b^t} \right) \frac{\bar{r}_{ab} \cdot \bar{v}_{ab}}{(\bar{r}_{ab}^t + \delta^t)} \nabla_a W_{ab} \quad (11)$$

که  $\mu^t$  مجموع ویسکوزیته دینامیکی و ویسکوزیته ادی برای هر ذره و  $\delta = 0.01 h$  یک مقدار بسیار کوچک برای غیرصفر شدن منجر است. با وجود این، رابطه (11) خطاهای عددی زیادی را در اطراف سطح آزاد ایجاد می‌کند. شوآیگر [30] با نشان دادن عدم دقت بالای این رابطه در اطراف سطوح آزاد با پیشنهاد یک اپراتور جدید، لاپلاسیان فشار و اثر ویسکوزیته را به صورت زیر بیان کرد:

$$(\nabla^t p)_a \approx \frac{\text{tr}(\Gamma^{-1})}{\gamma} \left\{ \sum_b \gamma V_b \frac{\bar{r}_{ab} \cdot \nabla_a W_{ab}}{(\bar{r}_{ab}^t + \delta^t)} p_{ab} - \gamma \nabla p_a \cdot \left( \sum_b V_b \nabla_a W_{ab} \right) \right\} \quad (12)$$

$$(\nabla \cdot \mu \nabla \bar{v})_a \approx \frac{\text{tr}(\Gamma_a^{-1})}{\gamma} \left\{ \sum_b \wedge V_b \left( \frac{\gamma \mu_a \mu_b}{\mu_a + \mu_b} \right) \frac{\bar{r}_{ab} \cdot \bar{v}_{ab}}{(\bar{r}_{ab}^t + \delta^t)} \nabla_a W_{ab} - [\nabla(\mu_a \bar{v}_a) - \bar{v}_a \nabla \mu_a + \mu_a \nabla \bar{v}_a] \cdot \left( \sum_b V_b \nabla_a W_{ab} \right) \right\} \quad (13)$$

قسمت‌های هموار جریان وجود نداشته باشد، موریس و موناگان [32] پیشنهاد دادند که  $\alpha_{\Pi}$  به صورت یک پارامتر جداگانه برای هر ذره در نظر گرفته شده و یک رابطه برای تعیین آن بیان کردند:

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\alpha_{\Pi} - \alpha_{\min}}{\varsigma} + S \quad \varsigma = \frac{hc_a}{\sigma}, \quad S = \max(0, -\nabla \cdot \bar{v}) \quad (16)$$

که  $S$  عبارتی است که در ناحیه ناپیوستگی افزایش می‌یابد،  $\varsigma$  زمان لازم برای کاهش مقدار  $\alpha$  به مقدار  $\alpha_{\min}$  است (به‌طور معمول  $\alpha_{\min} = 0.1$  و  $\alpha_{\max} = 1.0$ ). بنابراین معادله اندازه حرکت در بیان SPH، به صورت زیر ارائه می‌شود:

$$\frac{d\bar{v}_a}{dt} = - \sum_b m_b \left( \frac{p_a}{\rho_a} + \frac{p_b}{\rho_b} + \Pi_{ab} \right) \nabla_a W_{ab} + \frac{\text{tr}(\Gamma_a^{-1})}{\gamma} \left\{ \sum_b \wedge V_b \left( \frac{\gamma \mu_a \mu_b}{\mu_a + \mu_b} \right) \frac{\bar{r}_{ab} \cdot \bar{v}_{ab}}{(\bar{r}_{ab}^t + \delta^t)} \nabla_a W_{ab} - [\nabla(\mu_a \bar{v}_a) - \bar{v}_a \nabla \mu_a + \mu_a \nabla \bar{v}_a] \cdot \left( \sum_b V_b \nabla_a W_{ab} \right) \right\} + \bar{g} \quad (17)$$

$$L(\bar{r}_a) = \left( \begin{array}{cc} \sum_b V_b (x_b - x_a) \frac{\partial W_{ab}}{\partial x_a} & \sum_b V_b (x_b - x_a) \frac{\partial W_{ab}}{\partial y_a} \\ \sum_b V_b (y_b - y_a) \frac{\partial W_{ab}}{\partial x_a} & \sum_b V_b (y_b - y_a) \frac{\partial W_{ab}}{\partial y_a} \end{array} \right) \quad (9)$$

شتاب ذره ناشی از گرادیان فشار بر اساس تقریب ذره‌ای به صورت زیر ارائه می‌شود:

$$\frac{d\bar{v}_a^{(p)}}{dt} = - \sum_b m_b \left( \frac{p_a}{\rho_a} + \frac{p_b}{\rho_b} \right) \nabla_a W_{ab} \quad (10)$$

کلیری و همکاران [29] برای شتاب ناشی از اثرات ویسکوز رابطه‌ای که برای شبیه‌سازی جریان‌های آشفتنه بهتر عمل می‌کند ارائه داد:

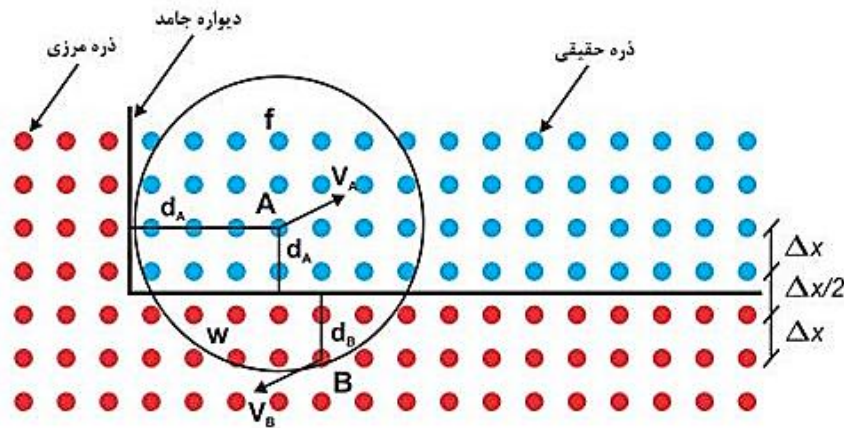
که  $\Gamma$  تانسوری است که به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\Gamma_a^{ij} = - \sum_b V_b \frac{\bar{r}_{ab} \cdot \nabla W_{ab}}{|\bar{r}_{ab}|^2} \bar{r}_{ab}^i \bar{r}_{ab}^j \quad (14)$$

که  $\bar{r}_{ab}^i$  و  $\bar{r}_{ab}^j$  به ترتیب نشان‌دهنده فاصله بین دو ذره  $a$  و  $b$  در جهت‌های مختصاتی  $i$  و  $j$  هستند. در تحقیق حاضر، گرادیان حاضر در جمله دوم سمت راست روابط (12) و (13) با استفاده از رابطه (9) به منظور کاهش بیشتر خطا در اطراف سطح آزاد اصلاح شد. همچنین، به منظور کاهش نوسانات تنش غیرفیزیکی و جلوگیری از نفوذ غیرفیزیکی برای ذرات در حال نزدیک شدن به یکدیگر، عبارت ویسکوزیته مصنوعی<sup>6</sup> به معادله بقای اندازه حرکت اضافه شده است. موناگان [31] رابطه‌ای را به منظور تعیین مقدار کافی اتلاف برای  $\Pi_{ab}$  پیشنهاد داد:

$$\Pi_{ab} = -\alpha_{\Pi} \frac{h \bar{c}_{ab} \cdot \bar{r}_{ab} \cdot \bar{v}_{ab}}{\bar{\rho}_{ab} |\bar{r}_{ab}|^2} \quad (15)$$

که  $\bar{\rho}_{ab}$  و  $\bar{c}_{ab}$  به ترتیب مقدار متوسط سرعت صوت و چگالی متوسط ذرات  $a$  و  $b$  هستند. ضریب بدون بعد  $\alpha_{\Pi}$  طبق ویژگی‌های مسئله در نظر گرفته می‌شود. به منظور اطمینان از اینکه ویسکوزیته مصنوعی به مقدار کافی در ناحیه ناپیوستگی تولید شود، اما در



شکل ۱- اندرکنش ذره سیال با ذرات سیال و ذرات مجازی همسایه برای کامل کردن دامنه پوشش ذره سیال

هستند. از رابطه زیر برای محاسبه اختلاف سرعت بین ذره حقیقی و مجازی در معادلات استفاده می‌شود:

$$\vec{v}_{ab} = \beta \vec{v}_a \quad (19)$$

که مقدار بی‌بعد  $\beta$  به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$\beta = \min \left( \beta_{\max}, 1 + \frac{d_b}{d_a} \right) \quad (20)$$

موریس با انتخاب  $\beta_{\max} = 1/5$  به نتایج خوبی دست یافت. در مطالعه حاضر،  $\beta_{\max} = 2/0$  در نظر گرفته شد.

برای محاسبه فشار ذرات مجازی، آدامی و همکاران [۳۴]، با صرف نظر کردن از اثرات لزجت بین ذرات حقیقی با ذرات مجازی، شرط مرزی دیوار لغزش آزاد را تعیین کرد. در مطالعه آدامی، فشار هر ذره مجازی دیواره  $w$ ، که در مجاورت یک ذره سیال  $f$  قرار دارد به صورت زیر بیان شد:

$$p_w = p_f + \rho \vec{g} \cdot (\vec{r}_f - \vec{r}_w) \quad (21)$$

عبارت دوم در سمت راست معادله (۲۱) مؤلفه هیدرواستاتیکی ناشی از اختلاف ارتفاع بین ذرات مجازی و ذرات سیال است. رابطه (۲۱) برای هر ذره مجازی دیواره در مجاورت با چند ذره سیال به روش SPH به فرم رابطه (۲۲) در می‌آید:

$$p_w = \frac{\sum_f [p_f + \rho \vec{g} \cdot (\vec{r}_f - \vec{r}_w)] V_f W_{wf}}{\sum_f V_f W_{wf}} \quad (22)$$

چگالی متناظر برای هر ذره مجازی دیواره از فشار تعیین شده از رابطه (۲۲) به دست می‌آید:

در مطالعه حاضر، معادلات SPH، با برآورده کردن روابط پیوستگی و بقای اندازه حرکت، با خواص سازگاری بهتر، تعیین نتایج دقیق را با هزینه محاسبه معقول امکان‌پذیر می‌کند.

### ۳- شرایط مرزی

در این مقاله، به منظور تعیین اندرکنش بین ماده دانه‌ای و مرز از ذرات مجازی<sup>۷</sup> پیشنهاد شده توسط موریس [۳۳] استفاده شد (شکل ۱). برتری اصلی ذرات مجازی در مقایسه با ذرات آینه‌ای، سادگی استفاده از آنها در هندسه‌های پیچیده و همچنین توصیف دقیق مرز در شبیه‌سازی، زمانی که چینش اولیه ذرات انجام می‌شود، است.

در شکل (۱) ذرات سیال نزدیک دیواره با ذرات مجازی معرف دیواره، بر مبنای همپوشانی توابع کرنل برخورد می‌کنند. مکان ذرات مجازی ثابت بوده و فاصله بین ذرات مجازی برابر با فاصله اولیه بین ذرات حقیقی در نظر گرفته می‌شود. به این ذرات ویسکوزیته متغیر برابر با ذرات حقیقی داده شده و سرعت موهومی این ذرات به صورت خطی بر حسب فاصله آنها بر مرز متناظر با ذره سیال همسایه آن با رابطه زیر تعیین می‌شود:

$$\vec{v}_b = -\frac{d_b}{d_a} \vec{v}_a \quad (18)$$

که  $d_b$  و  $d_a$  فاصله متعامد ذرات  $a$  و  $b$  از دیواره‌های نظیر

می‌توان مقدار عبارت اصلاحی برای حذف نوسانات ناخواسته فشار در مسئله را تنظیم کرد که برای جریان‌های با سرعت به نسبت پایین  $\sigma = 1$  کافی است [۳۵]. لازم به ذکر است:

$$\left\langle \nabla \cdot \left( \frac{\nabla p}{\rho} \right)^n \right\rangle_a = \sum_b v_b \nabla_a W_{ab} \cdot \left( \left\langle \frac{\nabla p^n}{\rho} \right\rangle_b - \left\langle \frac{\nabla p^n}{\rho} \right\rangle_a \right) \quad (28)$$

اندازه گام زمانی با توجه به برقراری شرایط پایداری، بر مبنای سرعت صوت و ویسکوزیته تعیین شده است [۲۵]:

$$\Delta t < C_{CFL} \cdot \min_a \left( \frac{h_a}{c_a}, \frac{\rho_a h_a^2}{\eta_a} \right) \quad (29)$$

که عدد بدون بعد کورانت  $C_{CFL}$  برابر با  $0.2$  برای شبیه سازی‌های دو بعدی برای مطالعه حاضر در نظر گرفته شده است.

## ۵- روابط ساختاری

رابطه بین تنش برشی و فشار در مسائل یک بعدی به صورت زیر نوشته می‌شود [۸]:

$$\tau = \mu p \quad (30)$$

که  $\mu$  ضریب اصطکاک است. ضریب اصطکاک به صورت محلی بر اساس عدد اینرسی  $I$  بر اساس رابطه ارائه شده توسط ژوپ و همکاران [۹] تعیین می‌شود:

$$\mu(I) = \mu_s + \frac{\mu_p - \mu_s}{1 + I^2} \quad (31)$$

که در آن  $\mu_s$  و  $\mu_p$  پارامترهای وابسته به ماده هستند. مدل محلی ارائه شده که توسط داکروز [۸] اعتبارسنجی شده است، عدد اینرسی را به صورت زیر معرفی می‌کند:

$$I = \frac{|\dot{\gamma}| D}{\sqrt{p/\rho_s}} \quad (32)$$

که  $|\dot{\gamma}|$  اندازه نرخ کرنش برشی،  $\rho_s$  چگالی و  $D$  قطر ماده دانه‌ای است. عدد اینرسی  $I$  یک پارامتر کنترلی برای انتقال بین دو وضعیت مختلف جریان (استاتیک و جریان سیال) است. برای عدد اینرسی پایین  $I$ ، جریان به صورت شبه‌استاتیک

$$\rho_w = \rho_{s,f} \left( \frac{p_w}{K} + 1 \right) \quad (23)$$

## ۴- الگوریتم SPH اصلاحی

استفاده از رابطه (۱۰) برای تعیین گرادیان فشار منجر به محاسبه گرادیان‌های فشار غیرصفر برای ناحیه‌های فشار ثابت می‌شود، از این رو تعیین غیردقیق فشار و افزایش نوسانات آن موجب رشد خطای عددی به ویژه در نواحی سطح آزاد خواهد شد. فاتحی و منظری [۳۵] نشان دادند که درگیری جابه‌جایی و سرعت، نوسانات غیرفیزیکی را کاهش می‌دهد، اصلاح معادله پیوستگی می‌تواند این مشکل را حل کند. در یک الگوریتم صریح زمانی، معادله پیوستگی (۳) برای بروزرسانی چگالی به صورت زیر است:

$$\rho^{n+1} = \rho^n - \Delta t \rho^n \left\langle \nabla \cdot \bar{v}^{n+1} \right\rangle \quad (24)$$

معادله مومنتوم اشاره شده در رابطه (۴) در یک الگوریتم صریح زمانی با رابطه زیر بیان می‌شود:

$$\bar{v}^{n+1} = \bar{v}^n + \Delta t \left[ \left\langle -\frac{\nabla p}{\rho} \right\rangle + (v + v_t) \nabla^2 \bar{v} + \bar{g} \right] \quad (25)$$

بنابراین، درگیری میدان چگالی و سرعت سیال را می‌توان به شرح رابطه (۲۶) برقرار ساخت:

$$\rho^{n+1} = \rho^n - \Delta t \rho^n \left\{ \nabla \cdot \left[ \bar{v} + \Delta t \left( (v + v_t) \nabla^2 \bar{v} \right)^n \right] - \left[ \Delta t \left\langle \nabla \cdot \left( \frac{\nabla p}{\rho} \right)^n \right\rangle \right] \right\} \quad (26)$$

از نوسانات فشار با توجه به تعیین فشار با استفاده از معادله حالت در روش هیدرودینامیک ذرات هموار تراکم‌پذیر ضعیف جلوگیری می‌شود. بنابراین، با استفاده از  $\bar{v}^{n+1} + \Delta t \frac{\nabla p}{\rho} = \bar{v}^n + \Delta t \left[ (v + v_t) \nabla^2 \bar{v} + \bar{g} \right]$  شده معادله پیوستگی می‌تواند به صورت زیر بیان شود:

$$\rho^{n+1} = \rho^n - \Delta t \rho^n \left\{ \nabla \cdot \left[ \bar{v}^{n+1} + \sigma \Delta t \frac{\nabla p^n}{\rho} \right] - \sigma \Delta t \left[ \frac{\nabla^2 p}{\rho} \right] \right\} \quad (27)$$

که در آن  $\sigma \geq 1$  پارامتر ثابت است. با استفاده از این ضریب،

## ۶- اعتبارسنجی و کاربردهای عددی

یک جریان دوبعدی تراکم‌ناپذیر دانه‌ای با ارتفاع  $h$  در امتداد یک سطح بی‌نهایت با زاویه  $\theta$ ، در نظر گرفته شد. حل تحلیلی این مسئله، پروفیل باگنولد<sup>۸</sup> است که در آن تنش برشی اصطکاکی با استفاده از رئولوژی  $\mu(I)$  مدل‌سازی شده است. پروفیل سرعت در حال پایدار از رابطه زیر تعیین می‌شود [۳۸]:

$$\frac{U(y)}{\sqrt{gd}} = \frac{2}{3} \bar{I} \sqrt{\varphi \cos \theta} \left[ \frac{h^{3/2} - (h-y)^{3/2}}{d^{3/2}} \right] \quad (36)$$

برای این پروفیل سرعت، میانگین عدد اینرسی  $\bar{I}$  و میانگین سرعت  $\bar{U}$  به ترتیب چنین تعریف شده‌اند:

$$\bar{I} = \frac{5}{2} \frac{\bar{U}d}{h \sqrt{\varphi g h \cos \theta}}, \quad \bar{U} = \frac{3}{5} U(h) \quad (37)$$

که  $U(h)$  سرعت سطح آزاد است. از آنجا که سرعت متوسط  $\bar{U}$  در همه جا یکسان و برابر با  $U_0$  است، با استفاده از پروفیل سرعت بگنولد که قبلاً تعریف شده است، در هر نقطه از جبهه، سرعت  $U_0$  برابر است با:

$$U_0 = \frac{2I_0}{5} \sqrt{\varphi g h_s \cos \theta} \frac{h_s}{d} = \frac{2\bar{I}}{5} \sqrt{\varphi g h \cos \theta} \frac{h}{d} \quad (38)$$

که  $\bar{I}$  عدد اینرسی مربوط به جریان با ضخامت  $h$  و  $I_0$  عدد اینرسی مربوط به جریان یکنواخت پایا در دور دست هستند. رابطه (۳۹) رابطه بین  $\bar{I}$  و  $I_0$  را بیان می‌کند:

$$\frac{I_0}{\bar{I}} = \left( \frac{h}{h_s} \right)^{3/2} \quad (39)$$

با استفاده از روابط (۳۱) و (۳۹)، نسبت  $\bar{I}/I_0$  را می‌توان به صورت تابعی از  $h/h_s$  بیان کرد:

$$\frac{\bar{I}}{I_0} = \left( \frac{h_s}{h} \right)^{3/2} \frac{\tan \theta - \mu_s}{\mu_r - \tan \theta} \quad (40)$$

که در آن مقدار  $I_0$  ثابت است. ژوپ و همکاران [۳۹] عبارت زیر را برای پارامتر  $I_0$  بر اساس نتایج تجربی ارائه کردند:

$$I_0 = \frac{5}{2} \frac{\beta d}{L \sqrt{\varphi \cos \theta}} \quad (41)$$

میانگین سرعت  $\bar{U}$ ، زاویه شیب  $\theta$  و ضخامت پروفیل جریان  $h$  از طریق یک رابطه تجربی به یکدیگر ارتباط داده شده‌اند:

$$\frac{\bar{U}}{\sqrt{gh}} = -\gamma + \beta \frac{h}{h_s(\theta)} \quad (42)$$

روش‌های عددی در مهندسی، سال ۳۸، شماره ۲، زمستان ۱۳۹۸

است که سرعت کمی دارد و برای مقدار بسیار بالای آن، یک حالت مشابه گاز با سرعت بالا رخ می‌دهد که در آن ذرات با برخورد دو به دو بر یکدیگر اثر می‌گذارند. جریان بین حالت‌های شبه‌استاتیک و گازی، به‌عنوان یک وضعیت ویسکوز یا متراکم در نظر گرفته می‌شود، که ماده دانه‌ای مانند سیال رفتار می‌کند. بنابراین جریان دانه‌ای در وضعیت متراکم می‌تواند با استفاده از معادلات دینامیکی کلاسیک برای سیال مدل شود [۳۶].

رابطه ساختاری برای "سیال دانه‌ای" توسط ژوپ و همکاران برای مسائل دو بعدی به‌روش زیر گسترش داده شد:

$$\tau^{\alpha\beta} = \frac{2\mu(I)p}{|\dot{\gamma}|} \varepsilon^{\alpha\beta} = 2\eta \varepsilon^{\alpha\beta}, \quad \eta = \frac{\mu(I)p}{|\dot{\gamma}|} \quad (33)$$

در این مدل، ویسکوزیته محلی بر اساس مقدار فشار  $p$ ، عدد اینرسی  $I$  و اندازه نرخ برش  $|\dot{\gamma}|$  تعیین می‌شود. این مدل بر اساس داده‌های تجربی گسترده‌ای ساخته شده است:

$$\eta = \frac{\mu_s p}{|\dot{\gamma}|} + \frac{(\mu_r - \mu_s)p}{|\dot{\gamma}| + \xi \sqrt{p}} \quad (34)$$

که  $\xi = I_0 (\rho_s D^2)^{-0.5}$  است. در رابطه (۳۴)، اولین جمله سمت راست نشان‌دهنده تنش تسلیم است که وضعیت‌های جریان جامد و ویسکوز را از هم متمایز می‌کند، درحالی که جزء دوم را می‌توان به‌عنوان تنش حاصل از رفتار ویسکوپلاستیک یک سیال غیرنیوتنی در نظر گرفت.

خصوصیات رئولوژی می‌تواند به صورت مستقیم با استفاده از یک روش منظم‌سازی ساده پیاده شود. روش تنظیم پیشنهادی که از تصحیح پاپاناستازو [۳۷] الهام گرفته شده است در مدل رئولوژی قرار داده می‌شود:

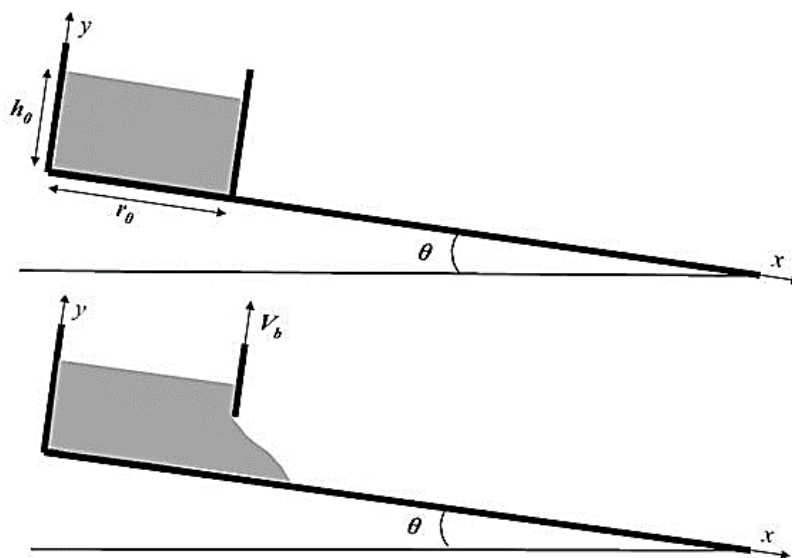
$$\eta = \mu_s p \frac{1 - e^{-|\dot{\gamma}|/\alpha_r}}{|\dot{\gamma}|} + \frac{(\mu_r - \mu_s)p}{\xi \sqrt{p} + |\dot{\gamma}| + \alpha_r} \quad (35)$$

که  $\alpha_r = 0.01$  است. شرایط واگرایی فقط در صورتی که هر دو مقدار فشار و اندازه نرخ کرنش صفر شوند رخ می‌دهد که روش منظم‌سازی پیشنهادی از واگرایی آن جلوگیری می‌کند.



جدول ۱- پارامترهای مدل رئولوژی برای شن و ماده دانه شیشه‌ای

| شن ( $d = 0.8 \text{ mm}$ ) | ماده دانه شیشه‌ای ( $d = 0.5 \text{ mm}$ ) |          |
|-----------------------------|--|----------|
| ۲/۰۳۰                       | ۱/۶۵۰                                      | L/d      |
| ۰/۷۷۰                       | ۰/۰۰۰                                      | $\gamma$ |
| ۰/۶۵۰                       | ۰/۱۳۶                                      | $\beta$  |
| ۰/۵۰۹                       | ۰/۳۸۲                                      | $\mu_s$  |
| ۰/۹۴۵                       | ۰/۶۴۳                                      | $\mu_p$  |



شکل ۲- نحوه انجام آزمایش: توده ابتدایی با ضخامت اولیه  $h_0 = 14 \text{ cm}$  و عرض  $r_0 = 20 \text{ cm}$  از روی سطح شیب‌دار با باز شدن دریچه رها می‌شود. دریچه با سرعت ثابت عمود بر سطح شیب‌دار حرکت می‌کند.

$$\bar{I} = \frac{5}{2} \frac{\beta d}{\sqrt{\varphi \cos \theta}} \frac{1}{h_s} \quad (44)$$

به منظور صحت‌سنجی الگوریتم پیشنهادی و مدل ساختاری ویسکوزیته وابسته به فشار محلی، فروریزش ستون‌های ماده دانه شیشه‌ای روی کانال‌های شیب‌دار شبیه‌سازی و با نتایج آزمایشگاهی [۷] و پروفیل بگنولد مقایسه می‌شود. مشخصات آزمایش شامل یک کانال مسطح به طول سه متر با زاویه‌های بین ۲۲ تا ۲۵ درجه است. توده دانه‌ای مستطیلی با ارتفاع اولیه  $h_0 = 14 \text{ cm}$  و طول  $r_0 = 20 \text{ cm}$  با نسبت ستون  $a = h_0/r_0 = 0.7$  است که به تدریج در زمان  $t = 0 \text{ s}$  با باز شدن یک دریچه (شکل ۲) آزاد می‌شود.

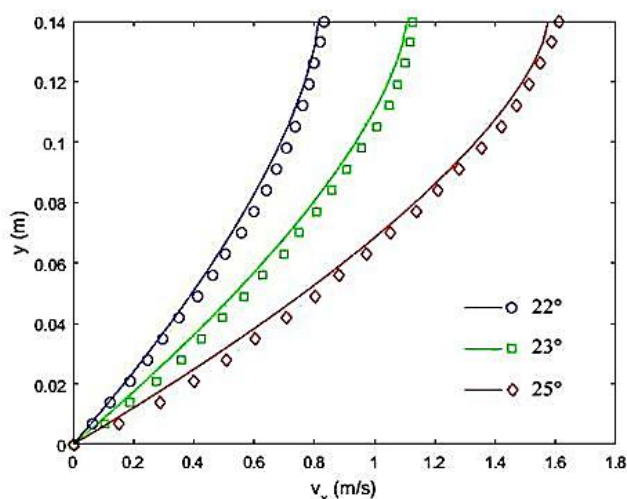
دانه‌های شیشه‌ای کروی و صلب با قطر  $0.5$  میلی‌متر هستند

فورتر و پولیگن [۴۰] بر اساس نتایج تجربی، مقادیر ثابت اشاره شده در روابط بالا را تعیین کردند، که در جدول (۱) آورده شده است:

برای ماده دانه شیشه‌ای با در نظر گرفتن  $\varphi = 0.6$  و مقدار متوسط  $\theta = 25^\circ$  به دست می‌آید. برای ماده دانه شیشه‌ای با  $\gamma = 0.0$ ، با استفاده از رابطه (۳۷) و (۴۲)، به رابطه تجربی زیر می‌توان نائل شد:

$$\bar{I} = \frac{5}{2} \frac{\beta d}{\sqrt{\varphi \cos \theta}} \frac{1}{h_s} \quad (43)$$

با استفاده از روابط (۴۰)، (۴۱) و (۴۳)، ضخامت  $h_s$  به زاویه شیب  $\theta$  و ارتفاع ابتدایی  $h$  ارتباط داده می‌شود که از طریق رابطه (۴۴) بیان می‌شود:



شکل ۳- پروفیل سرعت در وضعیت پایدار: خطوط نتایج تحلیلی محاسبه شده از رابطه (۳۶) و نشانگرها نتایج عددی هستند.

شکل نهایی نشست جز از نظر فاصله پایانی قابل مقایسه با نتایج تجربی است. با در نظر گرفتن اثر واقعی اصطکاک دیواره، که منجر به مسافت پیشروی بیشتری خواهد شد، انطباق بهتری با نتایج تجربی مشاهده خواهد شد. حداکثر ضخامت جریان برای  $\theta = 22^\circ$  در حدود ۵ cm است. نتایج عددی با مقایسه با جریان‌های آزمایشگاهی ارائه شده توسط مانجینی [۷] و رابطه به‌دست آمده در معادله (۴۴) مطابقت خوبی دارد.

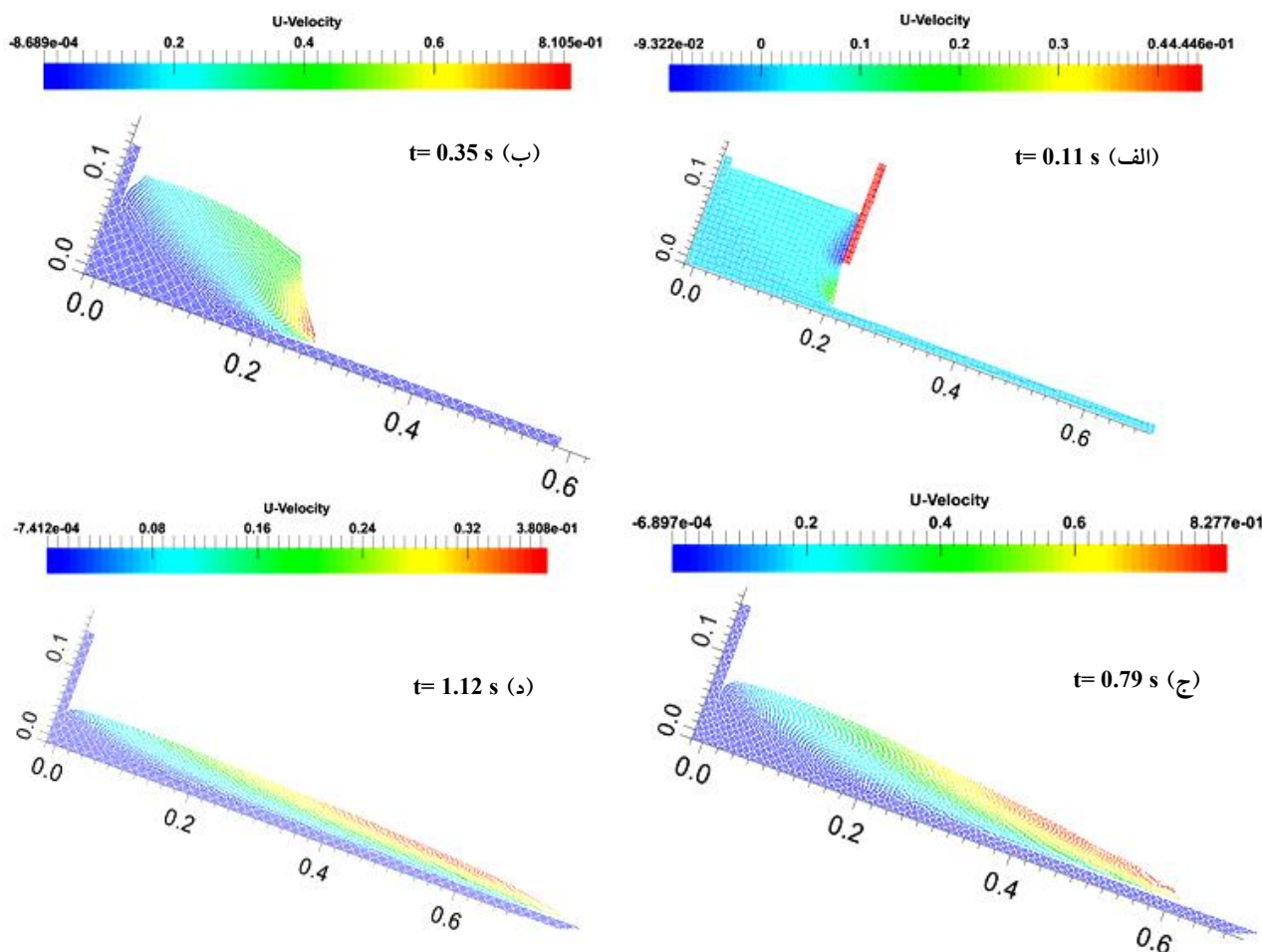
در اولین تصویر، در زمان ۰/۱۱s، بعد از برداشته شدن دریچه، بیشینه سرعت افقی نزدیک به سطح ایجاد می‌شود. در ادامه، جریان تنها در یک دامنه کم‌عمق در نزدیکی سطح آزاد که با میدان سرعت مشاهده می‌شود، متمرکز می‌شود. حداکثر سرعت افقی نزدیک سطح آزاد حاصل می‌شود. در ناحیه جریان، سرعت افقی یک پروفیل سهموی مشابه رابطه (۳۶) دارد (شکل ۴).

مقدار ویسکوزیته را می‌توان به‌سادگی از رابطه (۳۴) تنها با داشتن ضخامت اولیه ستون، قطر و چگالی دانه، زاویه شیب و پارامترهای رئولوژی  $\mu(I)$  به‌دست آورد. در واقع، مقدار فشار با فرض اینکه لایه جریان، ضخامتی برابر با نصف ضخامت اولیه دارد  $p = \rho_s g h_c / 2$ ، ویسکوزیته محلی را برابر با  $\eta = 1/4 \text{ pas}$  تعیین می‌کند. توجه داشته باشید که اندازه نرخ

که در یک کانال شیب‌دار جریان می‌یابند. چگالی ذرات  $\rho_s = 2500 \text{ kgm}^{-3}$  و کسر حجمی  $\phi = 0/6$  تخمین زده شده‌اند که چگالی جریان ظاهری با  $\rho = \phi \rho_s = 1500 \text{ kgm}^{-3}$  را نشان می‌دهد. در آزمایش‌های صورت گرفته، دریچه یکباره در زمان اولیه برای آزاد شدن توده دانه‌ای برداشته می‌شود؛ درحالی که در شبیه‌سازی عددی صورت گرفته در این مطالعه، سرعت جابه‌جایی  $V_{\text{gate}} = 1/3 \text{ ms}^{-1}$  برای دریچه در نظر گرفته شد.

شکل (۳) اعتبارسنجی مدل عددی در مقابل حل تحلیلی بگنولد را برای پروفیل سرعت جریان دانه‌ای در وضعیت پایدار نمایش می‌دهد. تغییرات سرعت برحسب ارتفاع به‌وضوح بر پروفیل بگنولد منطبق است. برای هر سه زاویه شیب، با توجه به حل تحلیلی، مدل عددی از نظر کیفی و کمی معتبر و قابل مقایسه است.

فروریزش در یک شیب ملایم با استفاده از پارامترهای مشابه، شبیه‌سازی شد. توده دانه‌ای در تماس بدون اصطکاک با یک دریچه است که در جهت عمود بر سطح شیب‌دار، برداشته می‌شود. شبیه‌سازی صورت گرفته با مدل ویسکوزیته متغیر وابسته به فشار، به‌خوبی پخش توده دانه‌ای را بازتولید می‌کند، هر چند فروریزش توده در بالای کانال خیلی سریع است و جبهه پیشروی نیز نسبت به مدل تجربی سریع‌تر پیش می‌رود.



شکل ۴- توزیع سرعت افقی در فروریزش توده دانه‌ای روی سطح شیب‌دار  $\theta = 22^\circ$

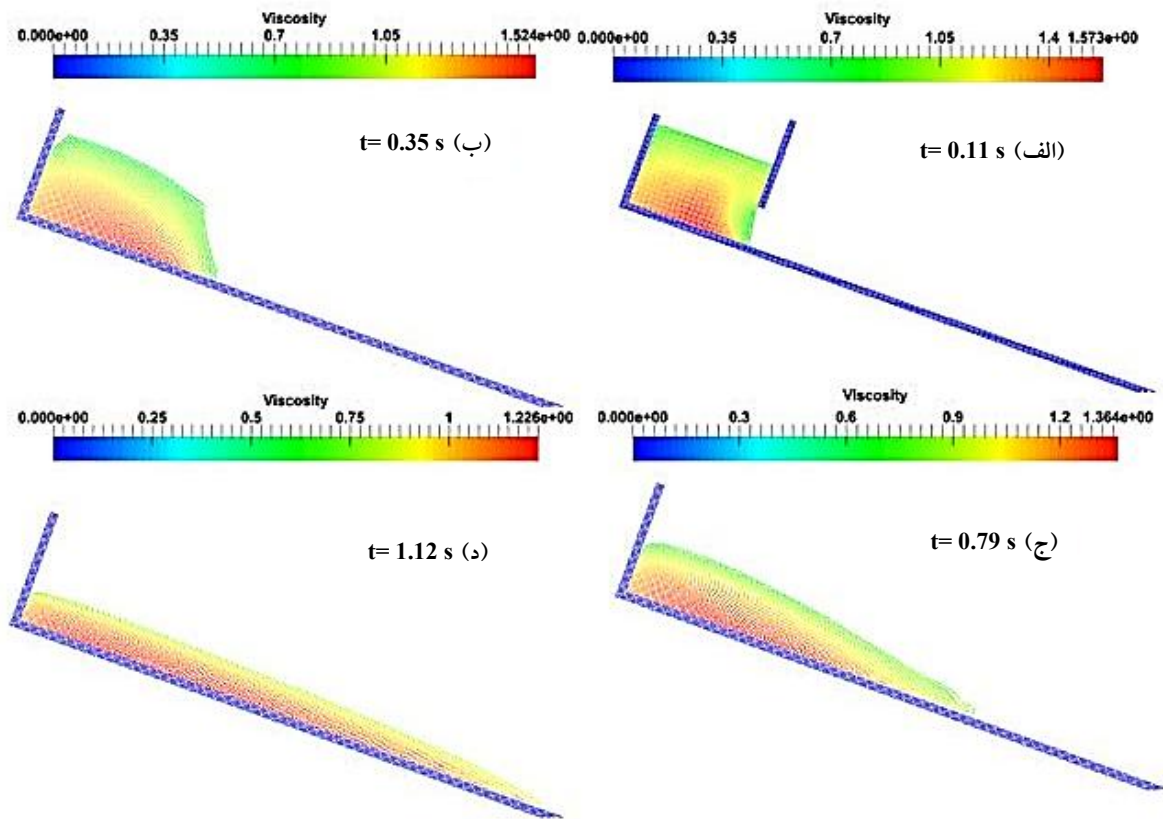
می‌پوشاند. توزیع نرخ کرنش ویژگی‌های جالبی را نشان می‌دهد، نرخ‌های کرنش بالا در ابتدا در نزدیکی بستر مجاور با جبهه پیشروی و در ادامه پایین شیب، بیشتر در امتداد منطقه جریان متمرکز هستند.

شکل (۶) مقایسه توده ماده دانه‌ای شبیه‌سازی شده و نتایج آزمایشگاهی انجام شده را در زمان‌های مختلف برای پروفیل ضخامت در طی فروپاشی برای زاویه شیب  $\theta = 1^\circ$  نشان می‌دهد. بدیهی است، همان‌طور که زاویه افزایش می‌یابد، نشست بیشتر به سمت پایین سطح گسترش می‌یابد و صاف‌تر می‌شود.

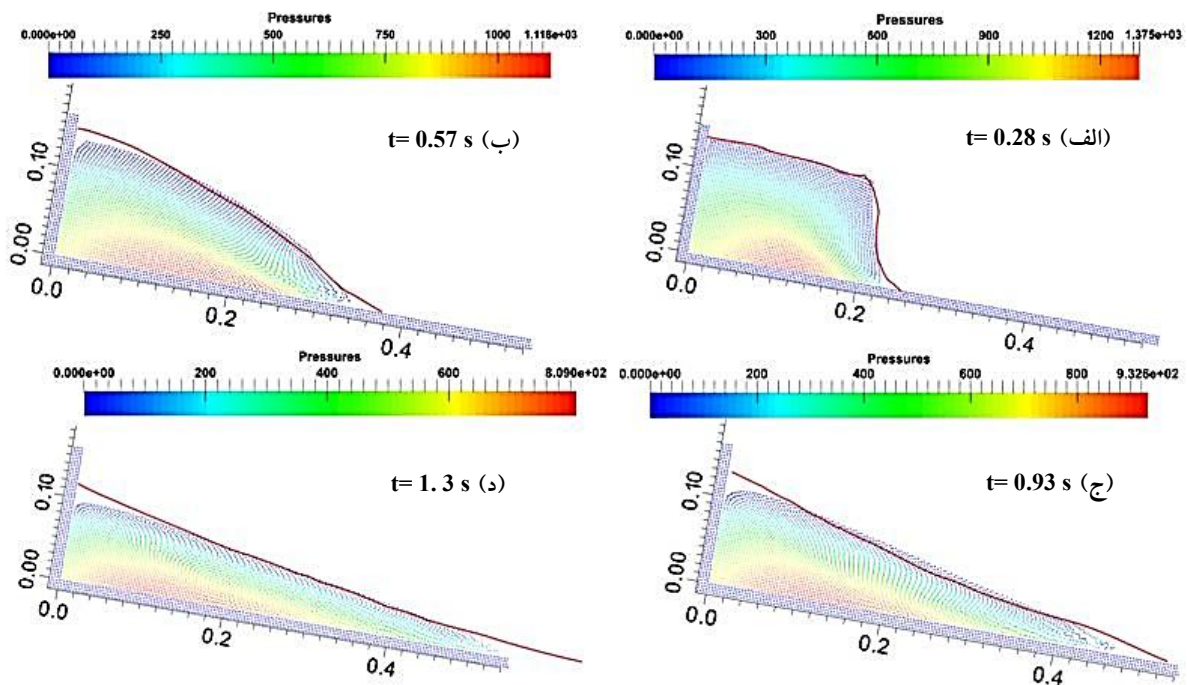
شکل نشست نهایی مطابقت خوبی با نتایج آزمایشگاهی دارد، به جز در مجاورت با دیواره پشتی، جایی که حداکثر ضخامت محاسبه شده کوچک‌تر است و حرکت جبهه آرام‌تر

کرنش در رابطه (۳۴) ناچیز است. همان‌طور که در شکل (۵) مشاهده می‌شود در ناحیه جریان، ویسکوزیته به تدریج با فاصله عمود بر سطح آزاد افزایش می‌یابد، که به نظر می‌رسد به‌طور عمده تحت تأثیر افزایش فشار قرار دارد. ویسکوزیته در نزدیکی انتقال ناحیه استاتیک/جریان (خط انفصال) نسبت به فروریزش در سطح افقی اندکی کمتر است. ویسکوزیته در جهت جبهه پیشروی کاهش می‌یابد، تا جایی که مقدار آن به کمتر از  $0.7^\circ$  می‌رسد. ویسکوزیته بین مقدار حداکثر در ناحیه استاتیک و مقدار حداقل خود که در مجاورت جبهه پیشروی و نزدیک به سطح آزاد به دست می‌آید، تغییر می‌کند. در نتیجه، ویسکوزیته به‌طور عمده الگویی شبیه به میدان فشار را نشان می‌دهد، که اثر میزان نرخ کرنش را

روش‌های عددی در مهندسی، سال ۳۸، شماره ۲، زمستان ۱۳۹۸



شکل ۵- توزیع ویسکوزیته دینامیکی بر اساس  $\mu(I)$  رئولوژی در فروریزش توده دانه‌ای روی سطح شیب‌دار  $\theta = 22^\circ$



شکل ۶- مقایسه شبیه‌سازی فروریزش توده دانه‌ای روی سطح شیب‌دار با زاویه شیب  $\theta = 1^\circ$  با نتایج آزمایشگاهی (خط قرمز) (رنگی در نسخه الکترونیکی)

جدول ۲- پارامترهای مدل رئولوژی برای شن در شبیه‌سازی فروریزش متقارن محوری

| $I_0$ | $\mu_2$ | $\mu_5$ | شن ( $d = 0.32 \text{ mm}$ ) |
|-------|---------|---------|------------------------------|
| ۲/۶۵۰ | ۱/۲۴۸   | ۰/۵۸۹   |                              |

مسئله با نسبت‌های ستون  $0.19 \leq a \leq 3.0$  با نیم‌پهنای ابتدایی  $r_b = 97/2 \text{ mm}$  و برای نسبت‌های ستون بزرگ‌تر از  $a > 3.0$  با نیم‌پهنای ابتدایی  $r_b = 29/2 \text{ mm}$  در نظر گرفته شد. پارامترهای استفاده شده در مدل رئولوژی در جدول (۲) آمده است [۳].

چگالی دانه  $\rho_s = 2600 \text{ kgm}^{-3}$  و کسر حجمی محیط دانه‌ای  $0.62$  قرار داده شد. شبیه‌سازی‌های فروریزش ستون جریان دانه‌ای نشان داد که مدل رئولوژی در روش SPH توانایی تعیین ویژگی‌های جریان دانه‌ای را در وضعیت متراکم دارد. محیط دانه‌ای در آغاز حرکت مانند یک سیال رفتار می‌کند. در طول جریان، به تدریج به حالت شبه استاتیک با سرعت پایین‌تر و تحرک کمتر تبدیل می‌شود. بسیاری از عوامل می‌توانند بر جابه‌جایی و مکانیزم گسیختگی ستون جریان دانه‌ای، همچون جنس ماده دانه‌ای، اندازه دانه و زبری بستر تأثیر بگذارند. زبری بستر در این مطالعه در نظر گرفته نشده است.

شکل‌های (۷) تا (۹) سه جریان گسیختگی ستون دانه‌ای از جنس دانه شیشه‌ای را برای  $a = 0.9$ ،  $a = 2/75$  و  $a = 4/80$  نشان می‌دهد. دو الگوی جریان برای فروپاشی ستون را می‌توان در شکل‌های (۷) تا (۹) مشاهده کرد. در فرایند فروپاشی، قسمت‌های ستون در هر دو طرف شروع به حرکت در جهت بیرونی می‌کنند، چون ذرات سطحی که به‌روی بستر لغزش می‌کنند، کمتر و کمتر می‌شوند، ستون به تدریج به نشست نهایی خود می‌رسد.

در شکل (۷)، ذرات جبهه‌های پیشروی به سمت خارج حرکت می‌کنند و سرعت بالایی را می‌توان در دو طرف جلوی ستون در لحظه  $0.05 \text{ s}$  مشاهده کرد. در زمان  $0.7 \text{ s}$ ، ذرات بیشتری واقع در سطح آزاد با سرعت زیاد، روی سطح افقی به سمت بیرون گسترش می‌یابند زیرا ذرات از بالای ستون با سرعت بالا فرو می‌ریزند. ستون به‌صورت یک تابع سینوسی

است و فاصله نهایی توقف  $15$  درصد کمتر از نتایج تجربی است. اثرات ویسکوز به‌شدت دینامیک جریان و نشست را تحت تأثیر قرار می‌دهد به‌طوری که مقدار پخش شدن ناشی از تغییر شکل پلاستیکی بسیار کمتر از مقدار آن به‌علت اثرات ویسکوز است. اثر ویسکوزیته دیوار جانبی بایستی چندین بار بیشتر از ویسکوزیته محیط دانه‌ای باشد، با در نظر گرفتن اثر واقعی ویسکوزیته دیواره، ضخامت نشست در نزدیکی دیواره پستی افزایش می‌یابد که با مشاهدات تجربی مطابقت بهتری خواهد داشت.

#### ۶-۱- فروریزش متقارن محوری

آزمایش فروریزش ستون دانه‌ای، یک محیط دانه‌ای محصور شده توسط یک مخزن است که با برداشتن آن ذرات روی یک صفحه افقی تحت وزن خود فرو می‌ریزند. جریان، با سقوط عمودی همراه با گسترش جانبی شروع می‌شود. آزمایش‌های انجام شده در پیکره‌بندی متقارن محوری توسط لوب [۳] صورت گرفت. اگر  $h$  ارتفاع اولیه و  $r_b$  نیم‌پهنای ابتدایی ستون،  $h_\infty$  ضخامت بیشینه نهایی و  $r_\infty$  نیم‌پهنای نهایی نشست ستون باشند.

مقیاس تجربی برای فاصله پیشروی نهایی جبهه در پیکره‌بندی دو بعدی به‌فرم زیر بیان شد:

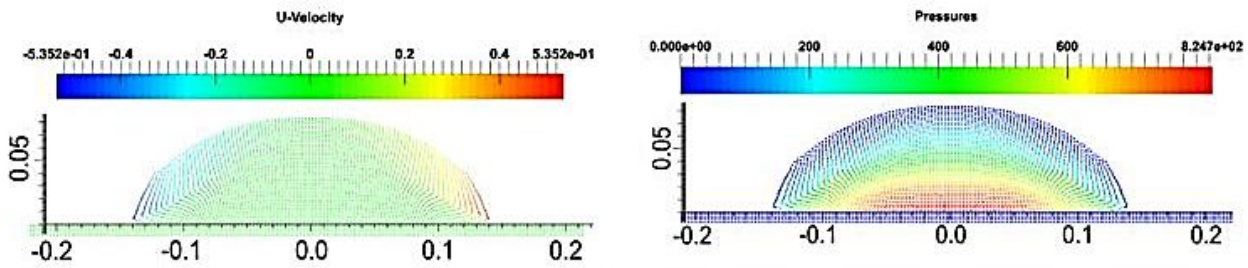
$$\frac{r_\infty - r_b}{r_b} = \begin{cases} 1/24a, & a \leq 1/7 \\ 1/6\sqrt{a}, & a > 1/7 \end{cases} \quad (45)$$

که  $a = h_\infty / r_b$  نسبت ستون است. مقیاس مشابهی برای ارتفاع نهایی نشست به‌دست آمد:

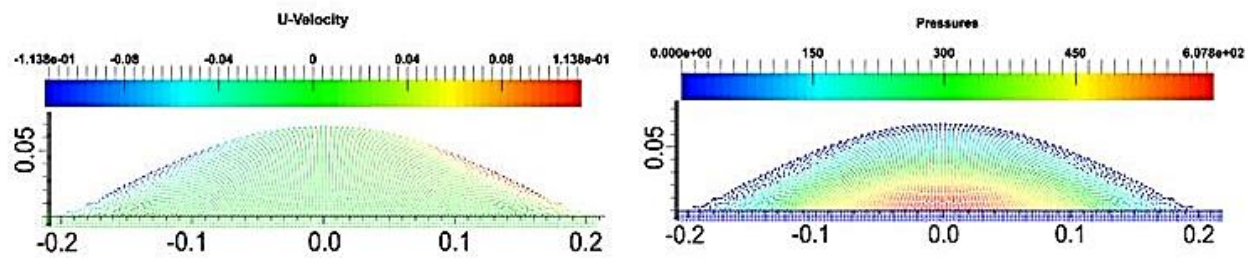
$$\frac{h_\infty}{r_b} = \begin{cases} a & a < 1/15 \\ a^{-1/4} & a > 1/15 \end{cases} \quad (46)$$

به‌منظور هماهنگی با شرایط آزمایشگاهی، برای شبیه‌سازی



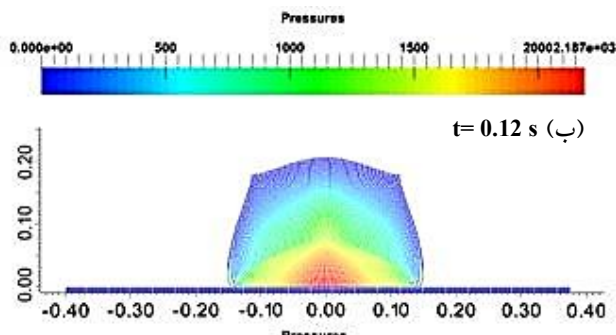


t = 0.07 s (الف)

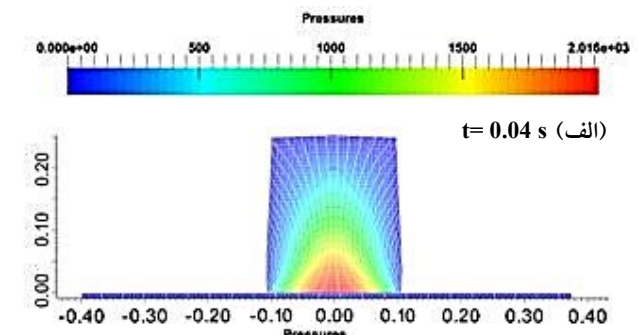


t = 0.3 s (ب)

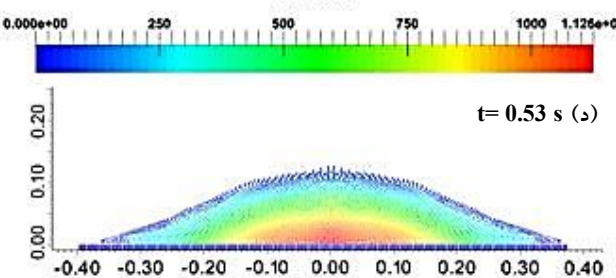
شکل ۷- فروریزش متقارن توده دانه‌ای با نسبت ستون ۹/۰° توزیع پروفیل سرعت (سمت چپ) و توزیع پروفیل فشار (سمت راست)



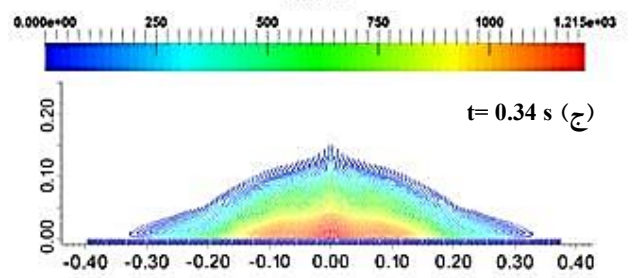
t = 0.12 s (ب)



t = 0.04 s (الف)



t = 0.53 s (د)

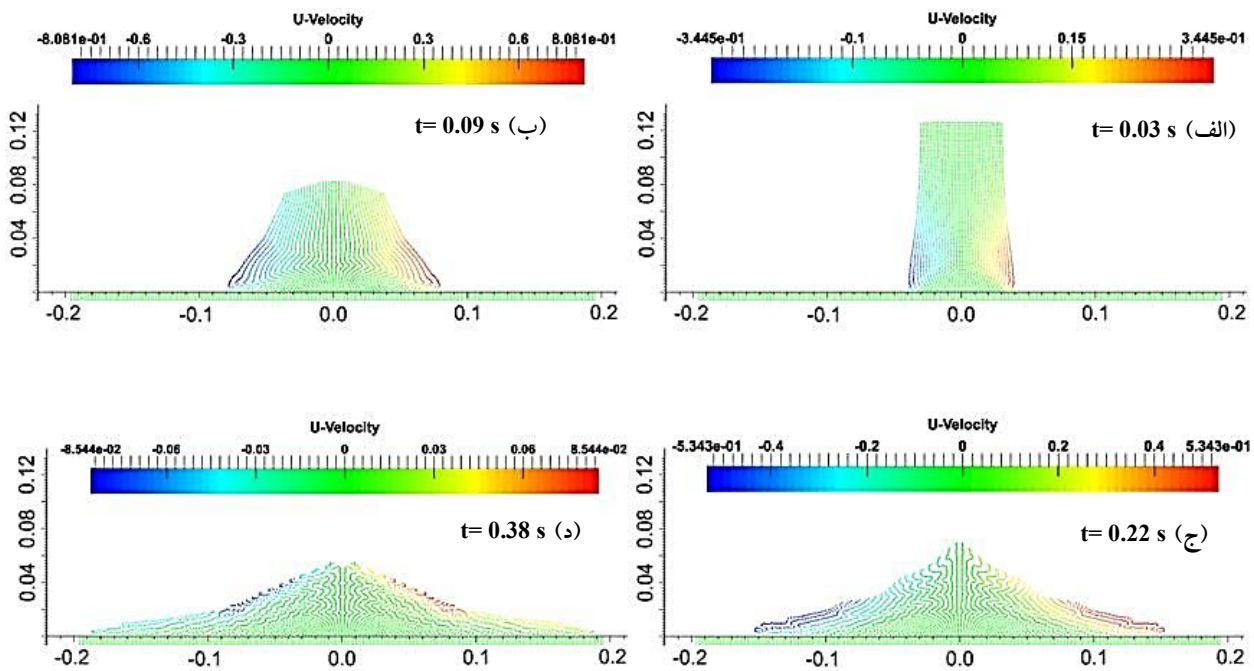


t = 0.34 s (ج)

شکل ۸- فروریزش متقارن توده دانه‌ای با نسبت ستون ۲/۷° و توزیع پروفیل فشار در زمان‌های متفاوت

۱۱/۰° ذرات با سرعت بالای کمتری در بالادست سطح آزاد وجود دارند. مدل استفاده شده منجر به سرعت پایین‌تر جبهه پیشروی نسبت به سایر مدل‌های عددی شده و بدین ترتیب با جابه‌جایی کمتر جبهه، نتایج مطابقت بهتری با نتایج

انتقال می‌یابد. به‌گونه‌ای که در هر دو جهت به‌طور متقارن و به‌طور همزمان حرکت می‌کند. در طی پخش و گسترش ذرات سطح آزاد به‌روی بستر، ذرات با سرعت بالا به‌تدریج از حالت جریان به حالت شبه‌استاتیک نزدیک می‌شوند؛ در نتیجه در زمان



شکل ۹- فروریزش متقارن توده دانه‌ای با نسبت ستون ۴/۸ و توزیع پروفیل سرعت افقی در زمان‌های متفاوت

آزمایشگاهی دارند. شکل (۱۰) نشان می‌دهد که مطابقت خوبی بین نتایج

عددی و تجربی وجود دارد که نشان می‌دهد الگوریتم پیشنهادی SPH با مدل ساختاری استفاده شده، قادر است این نوع جریان دانه‌ای را به درستی شبیه‌سازی کند.

#### ۷- بحث

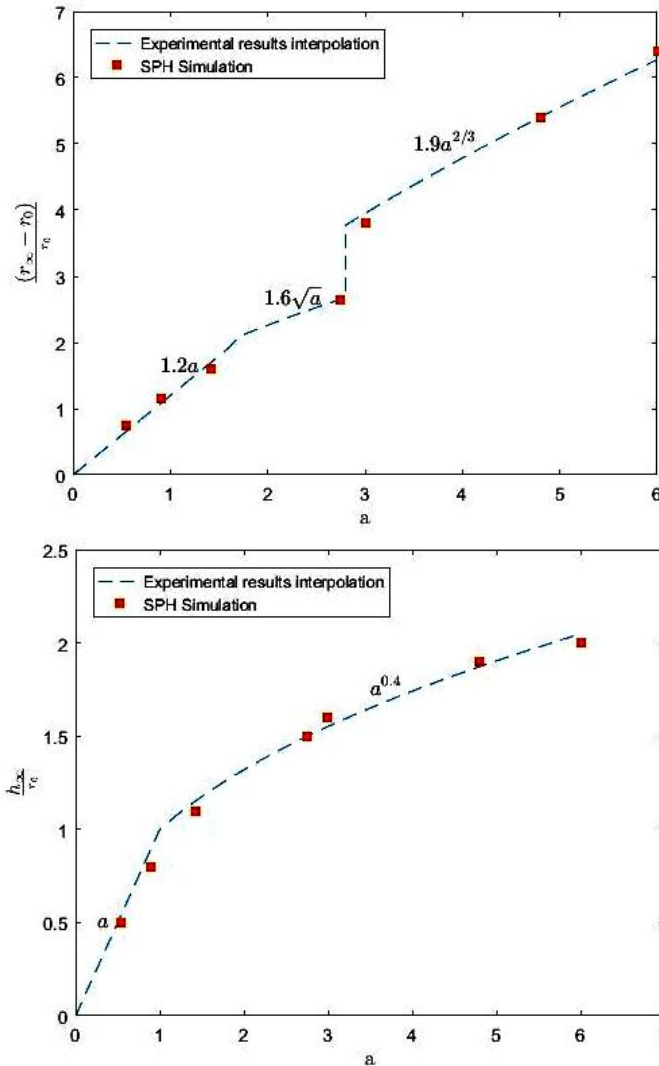
شبیه‌سازی‌های ارائه شده با استفاده از روش SPH در این مقاله، ویژگی‌های اصلی دینامیک جریان‌های سطح آزاد دانه‌ای را تعیین کرد. به عبارت دیگر، همان‌طور که در آزمایش‌ها مشاهده شد، تشکیل یک منطقه یکنواخت و خصوصیت جریان جابه‌جایی، به خوبی باز تولید شد.

در فروریزش ستون توده دانه‌ای، نتایج تأیید می‌کنند که منطقه یکنواخت در پشت جبهه جریان به صورت یک شرایط یکنواخت ایستا با پروفیل سرعت باگنولد رفتار می‌کند. علاوه بر تأثیر جزئی در شکل جبهه پیشروی، پارامترهای عددی به‌طور عمده نقش مهمی در زمان لازم برای رسیدن سرعت به مقدار ثابت و حالت پایدار دارند. شبیه‌سازی‌های عددی نشان می‌دهد که

برای نسبت  $a=2/75$ ، ستون از هر دو لبه شروع به فروریزش کرده (شکل ۸-ب) و پس از آن ذرات بالای سطح به‌طور مداوم به روی بستر به پایین می‌لغزند همان‌گونه که در (شکل ۸-ج) نشان داده شده است. در (شکل ۸-د)، نشست مخروطی برای ستون به وجود می‌آید.

برای نسبت ستون  $a=4/80$ ، با سقوط ستون دانه‌ای در جهت عمودی، بخش بالای ستون، شکل اصلی خود را حفظ می‌کند که در شکل (۹-الف) در زمان  $0.04s$  نشان داده شده است. در نزدیکی هر دو طرف جبهه پیشروی، ذرات به تدریج به سمت افقی منحرف شده، تا جایی که ذرات در حال سقوط عمودی با ذرات استاتیک مرکزی برخورد می‌کنند. پس از آنکه ستون به‌طور کامل سقوط می‌کند، جریان مشابه نمونه ادامه می‌یابد. پس از آنکه ستون به‌طور کامل سقوط می‌کند، جریان مشابه نمونه  $a=2/75$  ادامه می‌یابد. برای نسبت ستون بزرگ‌تر، مانند  $a=4/80$ ، فرایند سقوط عمودی بخش بالایی ستون در شکل (۹-الف) واضح‌تر است و حتی در زمان  $0.2s$ ، این قسمت هنوز هم در شکل (ب-۹) دیده می‌شود.

روش‌های عددی در مهندسی، سال ۳۸، شماره ۲، زمستان ۱۳۹۸



شکل ۱۰- مقایسه نتایج عددی بر اساس الگوریتم پیشنهادی با نتایج آزمایشگاهی ارائه شده توسط لوب

دانه‌ای، در نزدیکی بستر قرار دارند، این مناطق با تغییر شکل بالا بیانگر تأثیر غیرخطی رئولوژی  $\mu(I)$  است. پروفیل سرعت با بیشینه سرعت در سطح آزاد همراه با کاهش شدید سرعت در نزدیکی انتقال ناحیه استاتیک و ناحیه جریان است. برای فروریزش متقارن توده دانه‌ای، در مقایسه با آزمایش‌های، روش SPH با رئولوژی وابسته به فشار، روند تغییر شکل سطح ستون دانه‌ای ناشی از فروپاشی برحسب زمان را به خوبی پیش‌بینی می‌کند. دو ماده‌ای دانه‌ای از نوع ماسه و دانه شیشه‌ای در نظر گرفته شد. نتایج نشان داد که نسبت ستون (نسبت ارتفاع به عرض اولیه ستون)، در ستون‌های استوانه‌ای،

ویسکوزیته از مقادیری بالاتر از  $1/5$  در مناطق شبه‌استاتیک عمیق تا تقریباً صفر در نزدیکی سطح آزاد تغییر می‌کند. همان‌طور که زاویه سطح شیب‌دار افزایش می‌یابد، مدل استفاده شده سرعت و مقدار پیشروی جریان را اندکی کمتر از نتایج آزمایشگاهی پیش‌بینی می‌کنند. نتایج عددی نشان می‌دهد که تفاوت اصلی در نزدیکی دیوار کناری و جبهه پیشروی است. پارامتر  $I$  در رئولوژی  $\mu(I)$  در منطقه جریان به‌طور عمده تغییر می‌کند؛ منطقه نزدیک به جبهه پیشروی به‌وسیله جریان‌های نازک روی یک سطح تخت، مشخص می‌شود، این مناطق با نرخ کرنش بالا در پشت نوک جبهه پیشروی جریان



## ۸- نتیجه گیری

در مقاله حاضر، یک مدل شبیه‌سازی برای جریان مواد دانه‌ای خشک با استفاده از یک ویسکوزیته وابسته به فشار در روش SPH توسعه داده شد.

با توجه به رئولوژی وابسته به فشار، نوسانات فشار می‌تواند منجر به آشفتگی سرعت جریان و پروفیل سطح آزاد جریان شود. از این‌رو، یک الگوریتم اصلاح شده SPH در جهت کاهش نوسانات شدید فشار در حل مسائل پیشنهاد شد. نتایج نشان داد که روش پیشنهاد شده برای شبیه‌سازی مسائل مطرح شده در این تحقیق مؤثر است. شرایط مرزی جامد به‌کار گرفته شده باعث شد تا توزیع فشار در مرز جامد به‌میزان زیادی بهبود یابد و منجر به تشکیل پروفیل فشار هموار برای جریان دانه‌ای شود. استفاده از فرض ویسکوزیته ادی، به حل مسائل با سرعت جریان بالا که در مقادیر نسبت ستون زیاد اتفاق می‌افتد، کمک کرد. در حین به‌کارگیری مدل رئولوژی، از روش متعادل‌سازی مناسب استفاده شد. مدل رئولوژی در روش هیدرودینامیک ذرات هموار اعتبارسنجی شد و برای شبیه‌سازی مجموعه‌ای از جریان‌های دانه‌ای به‌کار گرفته شد.

نقش مهمی در گسترش دانه در سطح افقی ایفا می‌کند. تفاوت در مکانیزم گسیختگی ماده دانه‌ای وابسته به مقدار نسبت ستون به‌خوبی در شبیه‌سازی عددی قابل مشاهده است. برای مقادیر کم نسبت ستون، مکانیسم شکست ناشی از فروپاشی از لبه خارجی ستون است، درحالی که بخش داخلی ستون دست‌نخورده باقی می‌ماند. در نهایت یک نشست مخروطی برای ستون به‌وجود می‌آید. درحالی که برای مقادیر بالای نسبت ستون، تمام ستون دانه‌ای به‌طور کامل فرو می‌ریزد، و در نتیجه نشست نهایی به یک کلاه مکزیکی شبیه می‌شود. در نمونه‌های شبیه‌سازی شده برای نسبت‌های ستون کوچک، یک گوه مثلثی (یا گوه ذوزنقه‌ای) با یک پایه عریض وجود داشت که با سطح افق زاویه تشکیل داده جایی که دانه‌ها جابه‌جا نشدند. به‌جز در نزدیکی پای ستون که در آن جریان پلاگ مانند است، پروفیل‌های سرعت اندازه‌گیری شده همانند آنهایی هستند که معمولاً در جریان‌های سطحی دانه‌ای ایستا مشاهده می‌شوند. سرعت به‌صورت خطی با عمق در لایه جاری تغییر می‌کند و در لایه استاتیک، با عمق لایه به‌صورت نمایی کاهش می‌یابد.

## واژه‌نامه

|                                    |  |                         |
|------------------------------------|--|-------------------------|
| 1. smoothed particle hydrodynamics | method                                 | technique               |
| 2. Bingham fluid                   | 4. sub-particle-scale turbulence model | 6. artificial viscosity |
| 3. stress-strain regularization    | 5. artificial Compressibility          | 7. dummy particles      |
|                                    |  | 8. Bagnold Profile      |

## مراجع

1. Lajeunesse, E., Mangeney-Castelnau, A., and Vilotte, J. P., "Spreading of a Granular Mass on a Horizontal Plane", *Physics of Fluids*, Vol. 16, pp. 2371-2381, 2004.
2. Lajeunesse, E., Monnier, J., and Homsy, G., "Granular Slumping on a Horizontal Surface", *Physics of Fluids*, Vol. 17, p. 103302, 2005.
3. Lube, G., Huppert, H. E., Sparks, R. S. J., and Hallworth, M. A., "Axisymmetric Collapses of Granular Columns", *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 508, pp. 175-199, 2004.
4. Lube, G., Huppert, H. E., Sparks, R. S. J., and Freundt, A., "Collapses of Two-Dimensional Granular Columns", *Physical Review E*, Vol. 72, p. 041301, 2005.
5. Lube, G., Huppert, H. E., Sparks, R. S. J., and Freundt, A., "Static and Flowing Regions in Granular Collapses Down Channels", *Physics of Fluids*, Vol. 19, p. 043301, 2007.
6. Pouliquen, O., "Scaling Laws in Granular Flows Down Rough Inclined Planes", *Physics of Fluids*, Vol. 11, pp. 542-548, 1999.
7. Mangeney, A., Roche, O., Hungr, O., Mangold, N., Faccanoni, G., and Lucas, A., "Erosion and Mobility in Granular Collapse Over Sloping Beds", *Journal of Geophysical Research: Earth Surface*, Vol. 115,

- 2010.
8. Da Cruz, F., Emam, S., Prochnow, M., Roux, J. -N., and Chevoir, F., "Rheophysics of Dense Granular Materials: Discrete Simulation of Plane Shear Flows", *Physical Review E*, Vol. 72, p. 021309, 2005.
  9. Jop, P., Forterre, Y., and Pouliquen, O., "A Constitutive Law for Dense Granular Flows", *Nature*, Vol. 441, pp. 727-730, 2006.
  10. Kamrin, K., and Koval, G., "Nonlocal Constitutive Relation for Steady Granular Flow", *Physical Review Letters*, Vol. 108, p. 178301, 2012.
  11. Lagr ee, P. -Y., Staron, L., and Popinet, S., "The Granular Column Collapse as a Continuum: Validity of a Two-Dimensional Navier-Stokes Model with a  $\mu$  (I)-Rheology", *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 686, pp. 378-408, 2011.
  12. Kamrin, K., "Nonlinear Elasto-Plastic Model for Dense Granular Flow", *International Journal of Plasticity*, Vol. 26, pp. 167-188, 2010.
  13. Cundall, P. A., and Strack, O. D., "A Discrete Numerical Model for Granular Assemblies", *Geotechnique*, Vol. 29, pp. 47-65, 1979.
  14. Lucy, L. B., "A Numerical Approach to the Testing of the Fission Hypothesis", *The Astronomical Journal*, Vol. 82, pp. 1013-1024, 1977.
  15. Gingold, R. A., and Monaghan, J. J., "Smoothed Particle Hydrodynamics: Theory and Application to Non-Spherical Stars", *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Vol. 181, pp. 375-389, 1977.
  16. Randles, P., and Libersky, L., "Smoothed Particle Hydrodynamics: Some Recent Improvements and Applications", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 139, pp. 375-408, 1996.
  17. Eghtesad, A., Shafiei, A., and Mahzoon, M., "Study of Dynamic Behavior of Ceramic-Metal FGM under High Velocity Impact Conditions using CSPM Method", *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 36, pp. 2724-2738, 2012.
  18. Shao, S., and Gotoh, H., "Turbulence Particle Models for Tracking free Surfaces", *Journal of Hydraulic Research*, Vol. 43, pp. 276-289, 2005.
  19. Monaghan, J. J., "Simulating Free Surface Flows with SPH", *Journal of Computational Physics*, Vol. 110, pp. 399-406, 1994.
  20. Laigle, D., Lachamp, P., and Naaim, M., "SPH-Based Numerical Investigation of Mudflow and other Complex Fluid Flow Interactions with Structures", *Computational Geosciences*, Vol. 11, pp. 297-306, 2007.
  21. Pasculli, A., Minatti, L., Sciarra, N., and Paris, E., "SPH Modeling of Fast Muddy Debris Flow: Numerical and Experimental Comparison of Certain Commonly Utilized Approaches", *Italian Journal of Geosciences*, Vol. 132, pp. 350-365, 2013.
  22. Bui, H. H., Fukagawa, R., Sako, K., and Ohno, S., "Lagrangian Meshfree Particles Method (SPH) for Large Deformation and Failure Flows of Geomaterial using Elastic-Plastic Soil Constitutive Model", *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol. 32, pp. 1537-1570, 2008.
  23. Nguyen, C. T., Nguyen, C. T., Bui, H. H., Nguyen, G. D., and Fukagawa, R., "A New SPH-Based Approach to Simulation of Granular Flows using Viscous Damping and Stress Regularisation", *Landslides*, Vol. 14, pp. 69-81, 2017.
  24. Pouliquen, O., Cassar, C., Jop, P., Forterre, Y., and Nicolas, M., "Flow of Dense Granular Material: Towards Simple Constitutive Laws", *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, Vol. 2006, p. P07020, 2006.
  25. Liu, G. -R. and Liu, M. B., *Smoothed Particle Hydrodynamics: a Meshfree Particle Method*, World Scientific, 2003.
  26. Gotoh, H., Shibahara, T., and Sakai, T., "Sub-Particle-Scale Turbulence Model for the {MPS} Method - {L}agrangian Flow Model for Hydraulic Engineering", *Advanced Methods for Computational Fluid Dynamics*, Vol. 4-9, pp. 339-347, 2001.
  27. Abdelrazek, A. M., Kimura, I., and Shimizu, Y., "Simulation of Three-Dimensional Rapid Free-Surface Granular Flow Past Different Types of Obstructions using the SPH Method", *Journal of Glaciology*, Vol. 62, pp. 335-347, 2016.
  28. Oger, G., Doring, M., Alessandrini, B., and Ferrant, P., "An Improved SPH Method: Towards Higher Order Convergence", *Journal of Computational Physics*, Vol. 225, pp. 1472-1492, 2007.
  29. Cleary, P. W., and Monaghan, J. J., "Conduction Modelling using Smoothed Particle Hydrodynamics", *Journal of Computational Physics*, Vol. 148, pp. 227-264, 1999.
  30. Schwaiger, H. F., "An Implicit Corrected SPH Formulation for Thermal Diffusion with Linear Free surface Boundary Conditions", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 75, pp. 647-671, 2008.
  31. Monaghan, J., and Gingold, R. A., "Shock Simulation by the Particle Method SPH", *Journal of Computational Physics*, Vol. 52, pp. 374-389, 1983.
  32. Morris, J., and Monaghan, J., "A Switch to Reduce SPH Viscosity", *Journal of Computational Physics*, Vol. 136, pp. 41-50, 1997.
  33. Morris, J. P., Fox, P. J., and Zhu, Y., "Modeling Low Reynolds Number Incompressible Flows using SPH", *Journal of Computational Physics*, Vol. 136,

- pp. 214-226, 1997.
34. Adami, S., Hu, X., and Adams, N., "A Generalized Wall Boundary Condition for Smoothed Particle Hydrodynamics", *Journal of Computational Physics*, Vol. 231, pp. 7057-7075, 2012.
  35. Fatehi, R., and Manzari, M., "A Consistent and Fast Weakly Compressible Smoothed Particle Hydrodynamics with a New Wall Boundary Condition", *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 68, pp. 905-921, 2012.
  36. Goldhirsch, I., "Rapid Granular Flows", *Annual Review of Fluid Mechanics*, Vol. 35, pp. 267-293, 2003.
  37. Papanastasiou, T. C., "Flows of Materials with Yield", *Journal of Rheology*, Vol. 31, pp. 385-404, 1987.
  38. MiDi, G., "On Dense Granular Flows", *The European Physical Journal E*, Vol. 14, pp. 341-365, 2004.
  39. Jop, P., Forterre, Y., and Pouliquen, O., "Crucial Role of Sidewalls in Granular Surface Flows: Consequences for the Rheology", *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 541, pp. 167-192, 2005.
  40. Forterre, Y. and Pouliquen, O., "Long-Surface-Wave Instability in Dense Granular Flows", *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 486, pp. 21-50, 2003.