

## مدل‌سازی انتشار میدان موج لرزه‌ای با استفاده از روش اویلر

فرزاد مرادپوری\*

گروه مهندسی معدن، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه لرستان

(دریافت مقاله: ۱۳۹۷/۷/۱۹ - دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۷/۱۰/۲۲)

**چکیده** - اصولاً برونمایی میدان موج بر مبنای حل معادله موج یکی از مراحل مهم مدل‌سازی لرزه‌ای بوده و نیازمند دقت بسیار بالایی است. برونمایی میدان موج توسط روش‌های مختلف عددی از جمله روش تفاضلات محدود به‌عنوان یک روش سنتی و مرسوم انجام می‌شود. از جمله محدودیت‌های روش تفاضلات محدود کاهش دقت و پراکندگی عددی با بزرگ‌تر شدن فواصل زمانی ( $\Delta t$ ) است. یکی از راهکارهای حل این مشکل استفاده از انتگرال‌گیرهای ترکیبی است که با توجه به نوع ساختار آنها زمان محاسبات را کاهش داده و با افزایش فواصل زمانی دچار پراکندگی عددی نشده و دقت آن به نسبت روش تفاضلات محدود بیشتر است. از این‌رو در این مقاله ابتدا با استفاده از روش اویلر یک انتگرال‌گیر ترکیبی برای برونمایی میدان موج معرفی می‌شود. سپس برونمایی میدان موج برای یک فاصله زمانی به نسبت بزرگ در قالب یک مدل ساده برای هر دو روش تفاضلات محدود و روش ترکیبی اویلر نشان داده شده است که بیانگر برونمایی میدان موج با کیفیت بهتر است. در نهایت دقت برونمایی هر دو روش با هم مقایسه شده است که نشان از دقت بسیار بالاتر روش ترکیبی اویلر دارد.

واژه‌های کلیدی: مدل‌سازی لرزه‌ای، تفاضلات محدود، روش اویلر، دقت، پراکندگی عددی.

## Seismic Wave-Field Propagation Modelling using the Euler Method

F. Moradpouri\*

Department of Mining Engineering, Faculty of Engineering, Lorestan University, Khoramabad, Iran.

**Abstract:** Wave-field extrapolation based on solving the wave equation is an important step in seismic modeling and needs a high level of accuracy. It has been implemented through a various numerical methods such as finite difference method as the most popular and conventional one. Moreover, the main drawbacks of the finite difference method are the low level of accuracy and the numerical dispersion for large time intervals ( $\Delta t$ ). On the other hand, the symplectic integrators due to their structure can cope with this problem and act more accurately in comparison to the finite difference method. They reduce the computation cost and do not face numerical dispersion when time interval is increased. Therefore, the aim of the current paper is to present a symplectic integrator for wave-field extrapolation using the Euler method. Then, the extrapolation is implemented for rather large time intervals using a simple geological model. The extrapolation employed for both symplectic Euler and finite difference

\*: مسئول مکاتبات، پست الکترونیکی: moradpouri\_fa@lu.ac.ir

methods showed a better quality image for the proposed method. Finally the accuracy was compared to the finite difference method.

**Keywords:** Seismic modeling, Finite difference, Euler method, Accuracy, Numerical dispersion.

## فهرست علائم

سرعت انتشار موج صوتی	$c$	زمان	$t$
عملگر $L^2$	$-c^2(x)\nabla^2$	انرژی سینتیکی	$T(p)$
بردار نیرو	$f$	انرژی پتانسیلی	$V(x)$
مشتق اول میدان موج نسبت به زمان	$G$	تقریب مشتق دوم میدان موج	$W$
تابع همیلتونی	$H$	مکان	$x$
تابع بسل	$J$	زمان نمونه برداری	$\Delta t$
عدد موج	$k$	فواصل شبکه	$\Delta x, \Delta z$
میدان موج	$P$	مشتق جزئی	$\partial$
بردار اندازه حرکت	$p$	عملگر لاپلاسین	$\nabla$
چند جمله ای اصلاح شده چیشیف	$Q_{rk}$	مقدار ویژه	$\lambda$

### ۱- مقدمه

به طور اصولی انجام مدل سازی های مختلف معادله موج مینا با حل معادلات موج شروع می شود. این معادلات نوعی معادلات دیفرانسیل جزئی شامل مشتقات مکانی و زمانی هستند که با استفاده از روش های مختلفی به صورت عددی حل شده و میدان موج را در نقاط درون زمین برون یابی می کنند. معادله موج صوتی<sup>۱</sup> ارائه شده در رابطه (۱) از جمله پرکاربردترین این معادلات برای توصیف انتشار موج لرزه ای در زمین است.

$$\frac{\partial^2 P(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 P(x,t) \quad (1)$$

به طوری که  $P(x,t)$  میدان موج در زمان  $t$  و مکان  $x = (x,y,z)$  است،  $c = c(x)$  سرعت انتشار موج صوتی و  $\nabla^2$  عملگر لاپلاسین در مختصات کارتزین<sup>۲</sup> است.

برون یابی میدان موج یک راهکار ریاضیاتی است که امکان به دست آوردن میدان موج به صورت پیشرو و پسرو در زمان یا مکان را فراهم آورده و از طریق روش های بازگشتی<sup>۳</sup> و غیر بازگشتی<sup>۴</sup> قابل انجام است [۱ و ۲]. در روش های غیر بازگشتی،

برون یابی میدان موج در هر نقطه ای عمقی با استفاده از میدان ثبت شده در سطح قابل انجام است و نیاز به تعیین میدان موج در مراحل میانی نیست. در شرایط محیط غیر همگن، برون یابی در اعماق خیلی زیاد در یک مرحله نیازمند استفاده از عملگرهای بسیار پیچیده است که تنها به کمک الگوریتم های مدل سازی همانند ردیابی پرتو<sup>۵</sup> قابل انجام است. در مقابل روش های بازگشتی تا زمانی که فواصل برون یابی کوچک هستند و محیط به صورت محلی همگن است مشکلی ندارند.

روش تفاضلات محدود یکی از معروف ترین روش های بازگشتی حل عددی معادلات دیفرانسیلی جزئی بوده و به طور گسترده در مدل سازی لرزه ای استفاده می شود [۷-۳]. پاسخ عددی میدان موج با استفاده از روش تفاضلات محدود از گسسته سازی زمانی و مکانی برای تقریب زدن استفاده می کند [۸ و ۹]. در حل معادله موج با استفاده از روش تفاضلات محدود، در ابتدا عملگر زمان توسط یک طرح مرتبه دو تقریب زده می شود، در حالی که مشتقات مکانی توسط یک طرح مرتبه چهار تقریب زده می شوند. تقریب مشتق زمان به این صورت باعث

ایجاد خطای عددی می‌شود که منجر به تغییر شکل پالس<sup>۶</sup> و پراکندگی عددی می‌شود که با انتخاب گام‌های زمانی کوچک می‌توان از آن جلوگیری کرد [۱۰]. کوچک شدن گام زمانی باعث بالا رفتن دقت شده و در مقابل باعث بالا رفتن زمان و هزینه محاسبات می‌شود که هنگام مواجهه با یک مدل زمین‌شناسی واقعی پیچیده استفاده از آن با مشکل مواجه می‌شود.

از روش‌های دیگر با سازوکار بازگشتی الگوریتم‌های ترکیبی هستند که به واسطه ویژگی حفظ ساختار و شبیه‌سازی‌های بلندمدت شناخته شده هستند. این خصوصیات جالب الگوریتم‌های ترکیبی باعث کارآمدی آنها در بزرگ‌تر کردن فواصل زمانی و مکانی کوچک بدون کاهش دقت و مشکل پراکندگی عددی می‌شود [۱۱]. انتگرال‌گیرهای ترکیبی را می‌توان برای محاسبه عددی پاسخ معادله موج و مشتق اول زمانی آن مورد استفاده قرار داد. یکی دیگر از جنبه‌های جالب انتگرال‌گیرهای ترکیبی آن است که میدان موج برآورد شده برای محاسبه مشتق نسبت به زمان میدان موج در همان گام زمانی مورد استفاده قرار می‌گیرد. استفاده از انتگرال‌گیرهای ترکیب شده با روش بسط سریع می‌تواند میدان موج را به‌صورت پایدار و بدون نویز برون‌یابی کرده و به‌طور مؤثری برای مدل‌سازی داده‌های لرزه‌ای استفاده کند. این روش دارای دقتی همانند روش بسط سریع است. علاوه بر آن، اگر تعداد عبارات بسط به‌طور درست انتخاب شود، می‌تواند برای هر گام زمانی مورد استفاده قرار گیرد. از این‌رو در مقاله حاضر ضمن استفاده درست از روابط ریاضیاتی و نحوه ارتباط آنها با پارامترهای فیزیکی، به‌ویژه در حوزه علوم لرزه‌ای روش ترکیبی اویلر برای برون‌یابی میدان موج معرفی شده است. در روش معرفی شده، سعی شده است تا روابط موجود برای برون‌یابی میدان موج (در طول و عمق زمین) نسبت به سایر روش‌های ترکیبی موجود ساده‌تر و در عین حال امکان استفاده و اجرای آن تسهیل شود. همچنین روش معرفی شده اویلر این ویژگی را دارد تا ضمن استفاده از گام‌های زمانی بزرگ‌تر خطای ناشی از افزایش گام زمانی را در مقایسه با روش تفاضلات محدود به‌میزان زیادی

کاهش دهد. در عین حال در یک شرایط یکسان، زمان انجام محاسبات در این روش نسبت به روش تفاضلات محدود در استفاده از گام‌های زمانی بزرگ‌تر، به‌مراتب کمتر است.

## ۲- دستگاه معادلات موج همیلتونی

در ریاضیات انتگرال‌گیرهای ترکیبی به روش‌های انتگرال‌گیری عددی برای گروه خاصی از معادلات دیفرانسیلی مرتبط با مکانیک کلاسیک و هندسه ترکیبی گفته می‌شود [۱۲]. انتگرال‌گیرهای ترکیبی زیر مجموعه‌ای از انتگرال‌گیرهای هندسی را تشکیل می‌دهند، به عبارتی تبدیلات بآینی (متعارفی) هستند که شکل معادلات حرکت همیلتون را حفظ می‌کنند [۱۳].

یک دستگاه همیلتونی متشکل از معادلات متداول به‌شکل زیر است [۱۴].

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}$$

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} \quad (2)$$

که در آن  $\mathbf{x}$  و  $\mathbf{p}$  به ترتیب بردارهای  $n$  بعدی یک مختصات تعمیم‌یافته (مختصات لاگرانژی)، اندازه حرکت هستند.  $t$  متغیر زمانی مستقل و  $H = H(\mathbf{x}, \mathbf{p})$  تابع همیلتونی هستند. مجموعه مکان و مختصات اندازه حرکت  $(\mathbf{x}, \mathbf{p})$  مختصات بآین (متعارف) نامیده می‌شود.

با در نظر گرفتن دستگاه معادلات دیفرانسیلی به‌دست آمده از سیستم همیلتونی می‌توان نوشت.

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = T(\mathbf{p}) + V(\mathbf{x}) \quad (3)$$

به‌طوری که  $T(\mathbf{p})$  انرژی سینتیکی و  $V(\mathbf{x})$  انرژی پتانسیلی است.

بنابراین معادلات حرکت یک ذره با جرم واحد توسط معادله (۴) به‌دست می‌آید:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} = \mathbf{p}$$

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} = \mathbf{f} \quad (4)$$

به طوری که  $\mathbf{f}$  و  $\mathbf{p}$  به ترتیب بردارهای نیرو و اندازه حرکت هستند.

معادله موج را می توان با استفاده از فرمول های همیلتونی ارائه شده در رابطه (۴) بازنویسی و از آن در معرفی انتگرال گیر های ترکیبی استفاده کرد. بر اساس تحقیق اسکل و همکاران (۱۹۹۷)، روش های ترکیبی، نامتغیرهای خاص دستگاه همیلتونی را حفظ کرده و در بازه های انتگرال گیری بزرگ با دقت بسیار بالا عمل کرده و برای دستگاه های خطی با اندازه گام برون یابی به نسبت کوچک پایدار باقی می ماند [۱۱].

### ۳- روش اویلر

دسته ای از انتگرال گیرهای ترکیبی که به طور وسیع مورد استفاده قرار می گیرند، با به کارگیری روش جداسازی به وجود آمده اند. فرض کنید که دستگاه همیلتونی تفکیک پذیر باشد، به این معنی که بتوان آن را به شکل رابطه (۳) نوشت. برای ساده سازی نمادها،  $\mathbf{g} = (\mathbf{x}, \mathbf{p})$  معرفی می شود که بیانگر بردار مختصات بآین (متعارف) است. سپس دستگاه معادلاتی (۲) را می توان به صورت یک عبارت به صورت رابطه (۵) نوشت [۱۲].

$$\frac{d\mathbf{g}}{dt} = \{\mathbf{g}, H(\mathbf{g})\} \quad (5)$$

به طوری که کروشه، معرف کروشه پواسن<sup>۷</sup> است که به صورت عملگر رابطه (۶) معرفی می شود:

$$D_H \mathbf{g} = \{\mathbf{g}, H(\mathbf{g})\} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \quad (6)$$

دستگاه همیلتونی را می توان به صورت رابطه (۷) ساده کرد:

$$\frac{d\mathbf{g}}{dt} = D_H \mathbf{g} \quad (7)$$

پاسخ صوری<sup>۸</sup> این دستگاه معادلات توسط رابطه (۸) به دست می آید:

$$\mathbf{g}(t) = e^{[tD_H]} \mathbf{g}(\circ) \quad (8)$$

برای شکل همیلتونی رابطه (۳)،  $D_H = D_T + D_V$  دارای پاسخ صوری به صورت زیر است:

$$\mathbf{g}(t) = e^{[t(A+B)]} \mathbf{g}(\circ) \quad (9)$$

به طوری که  $A = D_T$  و  $B = D_V$ .

تا زمانی که  $A$  و  $B$  عملگرهای جابه جایی پذیر (آبلی)<sup>۹</sup> نیستند و  $t$  یک عدد حقیقی کوچک است، تابع نمایی می تواند توسط ضرب توابع نمایی به صورت معادله (۱۰) تقریب زده شود:

$$e^{[t(A+B)]} = \prod_{i=1}^k e^{(c_i t A)} e^{(d_i t B)} + o(t^{n+1}) \quad (10)$$

به طوری که  $n$  در رابطه (۱۰) مرتبه انتگرال نامیده شده و برای یک  $n$  داده شده مقادیر مجموعه اعداد حقیقی  $(c_1, c_2, \dots, c_k)$  و  $(d_1, d_2, \dots, d_k)$  طوری تعیین می شوند که اختلاف بین  $e^{[t(A+B)]}$  و ضرب نمایی ها از مرتبه  $t^{n+1}$  باشد.

با فرض  $c_i$  و  $d_i$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ )، به عنوان مجموعه ای از اعداد حقیقی که شرایط معادله (۱۰) را برای یک  $n$  داده شده تأمین می کنند. معادله (۹) را می توان به شکل زیر بازنویسی کرد:

$$\mathbf{g}(t) = \left[ \prod_{i=1}^k e^{(c_i t A)} e^{(d_i t B)} \right] \mathbf{g}(\circ) \quad (11)$$

در رابطه (۱۱)، انتقال نقطه به نقطه از  $\mathbf{g}(\circ)$  تا  $\mathbf{g}(t)$  انجام می شود. این انتقال به صورت ترکیبی انجام می شود، زیرا فقط ضرب ترکیبی اجزاء انتقال بوده و پاسخ دقیق رابطه (۹) از مرتبه  $o(t^n)$  را تقریب می زند. علاوه بر این رابطه (۱۱) به طور صریح از طریق رابطه (۹) قابل محاسبه است. در واقع معادله (۱۱) توالی از انتقال ها را به دست می دهد:

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_{i-1} + t c_i \frac{\partial T}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{p}_{i-1})$$

$$\mathbf{p}_i = \mathbf{p}_{i-1} - t d_i \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_i) \quad (12)$$

برای  $i = 1$  تا  $i = k$ ، به طوری که  $(\mathbf{x}_\circ, \mathbf{p}_\circ) = \mathbf{g}(\circ)$  و  $(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \mathbf{g}(t)$ . انتگرال ترکیبی از مرتبه  $n$  به دست می آید.

یوشیدا (۱۹۹۰)، برخی از روش ها را برای تعیین مجموعه ضرایب  $(c_i, d_i)$  که شرایط رابطه (۱۰) را تأمین می کنند، معرفی کرد. روش معرفی شده، طرف چپ و راست معادله (۱۰) را با توان  $t$  بسط داده و ضرایب توان های برابر  $t$  از مرتبه  $o(t^n)$  را برابر می کند. به این ترتیب یک دسته از معادلات جبری غیرخطی برای ضرایب نامعین  $c_i$  و  $d_i$  به دست می آیند. برای مثال برای  $n = 1$  (انتگرال گیر مرتبه اول)، جواب صفر<sup>۱۰</sup>

برابر است با  $c_1 = d_1 = 1$  ،  $k = 1$  و می توان نوشت:

$$e^{t(A+B)} = e^{(tA)}e^{(tB)} + o(t^2) \quad (13)$$

استفاده از ضرایب  $c_1 = d_1 = 1$  در معادله (۱۲)، روش اولی را مطابق آنچه که در رابطه (۱۴) آمده است، به دست می دهد:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= \mathbf{x}_0 + t \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{p}_0), \\ \mathbf{p}_1 &= \mathbf{p}_0 - t \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_1) \end{aligned} \quad (14)$$

### ۳-۱- ارائه انتگرال گیر ترکیبی اولی

در این قسمت روش عددی ترکیبی برون یابی میدان موج با استفاده از روش اولی (رابطه ۱۴) برای استفاده در مدل سازی لرزه ای ارائه می شود. در ابتدا رابطه (۱) را می توان به شکل ساده تر زیر بازنویسی کرد:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{P}(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} = -L^2 \mathbf{P}(\mathbf{x}, t) \quad (15)$$

به طوری که  $-L^2 = c^2(\mathbf{x}) \nabla^2$  است.

پاسخ رابطه (۱۵)، با شرایط اولیه  $\frac{\partial \mathbf{P}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = \dot{\mathbf{P}}$  و  $\mathbf{P}(\mathbf{x}, t=0) = \mathbf{P}_0$  به صورت زیر است:

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}, t) = \cos(Lt) \mathbf{P}_0 + L^{-1} \sin(Lt) \dot{\mathbf{P}} \quad (16)$$

میدان های موج  $\mathbf{P}(\mathbf{x}, t + \Delta t)$  و  $\mathbf{P}(\mathbf{x}, t - \Delta t)$  را می توان توسط رابطه (۱۶)، برآورد کرد. برای حذف بخش مشتق زمانی میدان موج در این معادله، با اضافه کردن این دو میدان موج، بخش فرد پاسخ در زمان حذف شده و تنها بخش زوج آن باقی خواهد ماند. در نتیجه:

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}, t + \Delta t) + \mathbf{P}(\mathbf{x}, t - \Delta t) = 2 \cos(L\Delta t) \mathbf{P}(\mathbf{x}, t) \quad (17)$$

پاسخ تحلیلی رابطه (۱۷) در شکل ساده تر به صورت زیر نوشته می شود [۱۵]:

$$\mathbf{P}(t + \Delta t) + \mathbf{P}(t - \Delta t) = 2 \cos(L\Delta t) \mathbf{P}(t), \quad L^2 = -c^2 \nabla^2 \quad (18)$$

به طوری که برای محاسبه  $\cos(L\Delta t)$ ، باید عملگر  $L^2$  را به طور صریح محاسبه و سپس از بسط چیشف ارائه شده توسط کوزلوف و همکاران (۱۹۸۹) استفاده کرد. در اینجا، رابطه (۱۸)

بازنویسی شده، اما تابع کسینوس با بسط چیشف آن جایگزین می شود [۱۷-۱۵].

$$\mathbf{P}(t + \Delta t) + \mathbf{P}(t - \Delta t) = 2 \left[ \sum_{k=0}^M C_{\gamma k} J_{\gamma k}(\Delta t R) Q_{\gamma k} \left( \frac{iL}{R} \right) \right] \mathbf{P}(t) \quad (19)$$

که در آن  $C_0 = 1$  و  $C_k = 2$  برای  $k \neq 0$  است، مقدار  $M$  بسته به نوع مسئله از صفر تا بی نهایت قابل تغییر است.  $J_k(\Delta t R)$  معرف توابع بسل<sup>۱۱</sup> مرتبه  $k$  است به طوری که  $z = \Delta t R$  و  $Q_{\gamma k}$  چند جمله ای اصلاح شده چیشف<sup>۱۲</sup> هستند. مقدار  $R$  برای انتشار دو بعدی موج به طور تقریبی از رابطه زیر به دست می آید:

$$R = c_{\max} \pi \sqrt{\left(\frac{1}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{1}{\Delta z}\right)^2} \quad (20)$$

به طوری که،  $R$  یک مقدار اسکالر بزرگ تر از مقادیر ویژه  $-L^2$  است. همچنین  $c_{\max}$  حداکثر سرعت در شبکه و  $\Delta x$  و  $\Delta z$  فواصل شبکه هستند [۱۶].

عبارت رابطه (۱۹)، تنها شامل چند جمله ای های اصلاح شده چیشف زوج است. مجموع بسط عبارت  $\cos(L\Delta t)$  در معادله (۱۹) به طور نمایی برای  $M > \Delta t R$  همگرا می شود، بنابراین، با اطمینان می توان مجموع بسط را با استفاده از تعیین مقدار  $M$  به ازای مقادیر کمی بزرگ تر از  $\Delta t R$  قطع<sup>۱۳</sup> کرد [۱۶].

برای معرفی طرح ترکیبی انتگرال گیر اولی و روش بسط سریع، عبارت  $2\mathbf{P}(t)$  به دو طرف رابطه (۱۹)، اضافه شده و عبارت  $\sqrt{(\Delta t)^2}$  در هر دو طرف این معادله ضرب می شود، نتیجه به صورت زیر خواهد شد:

$$\frac{\mathbf{P}^{(n+1)} - 2\mathbf{P}^{(n)} + \mathbf{P}^{(n-1)}}{(\Delta t)^2} = \frac{2}{(\Delta t)^2} \left[ \sum_{k=0}^M C_{\gamma k} J_{\gamma k}(\Delta t R) Q_{\gamma k} \left( \frac{iL}{R} \right) - 1 \right] \mathbf{P}^{(n)} \quad (21)$$

باید توجه شود که عبارت سمت چپ تساوی در رابطه (۲۱)، تقریب تفاضل محدود مرکزی<sup>۱۴</sup> مرتبه دو برای  $\partial^2 \mathbf{P} / \partial t^2$  و با  $W(\mathbf{P}^{(n)})$  برابر است (تقریب مشتق دوم میدان موج با استفاده از تفاضلات محدود مرکزی).

ترکیبی اویلر (معادله ۲۷) را به صورت معادله (۳۰) نیز نوشت:

$$P^{(n+1)} = P^{(n)} + \Delta t G^{(n)}$$

$$G^{(n+1)} = \frac{\gamma}{\Delta t} \left[ \left( \sum_{k=0}^M C_{\gamma k} J_{\gamma k} Q_{\gamma k} \right) - 1 \right] P^{(n)} + \left[ \gamma \sum_{k=0}^M C_{\gamma k} J_{\gamma k} Q_{\gamma k} - 1 \right] G^{(n)} \quad (30)$$

برای تحلیل پایداری طرح ترکیبی اویلر- بسط سریع، با استفاده از تبدیل فوریه ماتریس ارائه شده در رابطه (۲۹) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$A = \begin{pmatrix} 1 - \frac{(ck\Delta t)^\gamma}{\gamma} & \Delta t \\ -(ck)^\gamma \Delta t + \frac{(ck)^\gamma (\Delta t)^\gamma}{\gamma} & 1 - \frac{(ck\Delta t)^\gamma}{\gamma} \end{pmatrix} \quad (31)$$

نوشتن معادله مشخصه به صورت  $\det(A - \lambda I) = 0$ ، مقادیر ویژه را طبق رابطه (۳۲) به دست می‌دهد:

$$\lambda = \left[ 1 - \frac{(ck\Delta t)^\gamma}{\gamma} \right] \pm (ck\Delta t) \sqrt{\frac{(ck\Delta t)^\gamma}{\gamma} - 1} \quad \text{or}$$

$$\lambda = \sum_{k=0}^M C_{\gamma k} J_{\gamma k} Q_{\gamma k} \pm \sqrt{\left( \sum_{k=0}^M C_{\gamma k} J_{\gamma k} Q_{\gamma k} \right)^\gamma - 1} \quad (32)$$

به طوری که  $\lambda$ ،  $k$ ،  $c$  و  $\Delta t$  به ترتیب بیانگر مقدار ویژه، عدد موج، سرعت موج در محیط و زمان هستند.

برای پایداری روش ترکیبی اویلر- بسط سریع (معادله ۳۰) باید  $|\lambda| \leq 1$ ، بنابراین  $\lambda$  نیز عدد مختلط باشد، به این معنی که ریشه معادله (۳۲) باید کمتر از صفر باشد و در نتیجه:

$$\frac{(ck\Delta t)^\gamma}{\gamma} - 1 \leq 0 \quad (33)$$

عبارت معادله (۳۳) شرط پایداری طرح ترکیبی اویلر- بسط سریع به صورت زیر را به دست می‌دهد:

$$\Delta t \leq \frac{\gamma}{c_{\max} \sqrt{\left( \frac{1}{\Delta x} \right)^\gamma + \left( \frac{1}{\Delta z} \right)^\gamma}} \quad (34)$$

به طوری که  $c_{\max}$  حداکثر سرعت در شبکه و  $\Delta x$  و  $\Delta z$  فواصل شبکه هستند.

#### ۴- نتایج عددی

برای مطالعه حاضر، یک مدل ساده چندلایه‌ای با سرعت‌های

روش‌های عددی در مهندسی، سال ۳۸، شماره ۲، زمستان ۱۳۹۸

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = \frac{P^{(n+1)} - \gamma P^{(n)} + P^{(n+1)}}{(\Delta t)^\gamma} \quad (22)$$

$$W(P^{(n)}) = \frac{\gamma}{(\Delta t)^\gamma} \left[ \sum_{k=0}^M C_{\gamma k} J_{\gamma k} (\Delta t R) Q_{\gamma k} \left( \frac{iL}{R} \right) - 1 \right] P^{(n)} \quad (23)$$

اکنون با استفاده از دستگاه معادلات همیلتونی می‌توان روابط (۱)، (۱۵) و (۲۱) را به شکل واحد زیر با هم مرتبط کرد [۱۰، ۱۸ و ۱۹]:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = G, \quad \frac{\partial G}{\partial t} = \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = W(P^{(n)}) \quad (24)$$

معادله موج (۲۴) این امکان را فراهم می‌کند تا بتوان دسته‌ای از روش‌های ترکیبی را برای انتگرال‌گیری در زمان استفاده کرد.

حل معادله (۲۴) با استفاده از روش اویلر (معادله ۱۴)، در

معادله (۲۵) ارائه شده است:

$$P^{(n+1)} = P^{(n)} + \Delta t G^{(n)},$$

$$G^{(n+1)} = G^{(n)} + \Delta t W(P^{(n+1)}) \quad (25)$$

معادله (۲۵) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$P^{(n+1)} = P^{(n)} + \Delta t G^{(n)},$$

$$G^{(n+1)} = G^{(n)} + \Delta t c^\gamma \nabla^2 P^{(n+1)} = G^{(n)} + \Delta t c^\gamma \nabla^2 \left[ P^{(n)} + \Delta t G^{(n)} \right] \quad (26)$$

در نتیجه می‌توان معادله نهایی انتگرال‌گیر ترکیبی اویلر را به شکل زیر نوشت:

$$P^{(n+1)} = P^{(n)} + \Delta t G^{(n)},$$

$$G^{(n+1)} = \Delta t c^\gamma \nabla^2 P^{(n)} + (1 + \Delta t c^\gamma \nabla^2) G^{(n)} \quad (27)$$

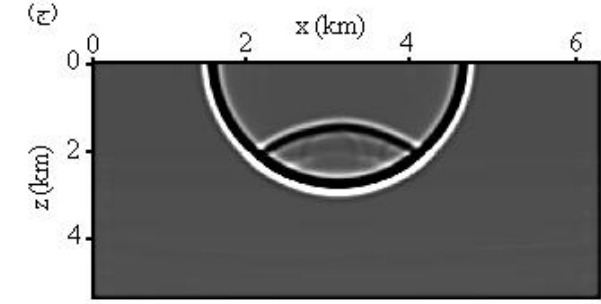
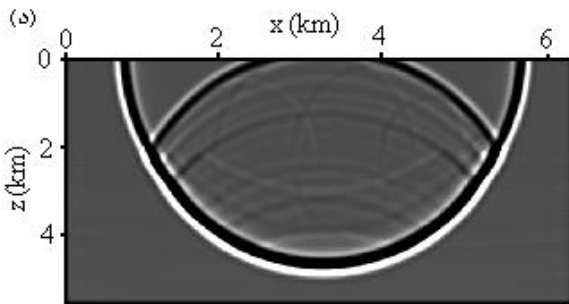
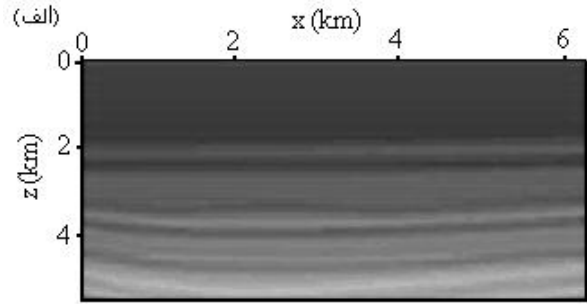
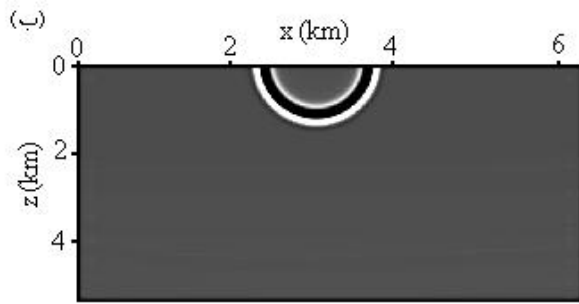
که طرح ترکیبی معادله (۲۷) انتگرال‌گیر اویلر و روش بسط سریع نامیده می‌شود که می‌توان آن را به شکل ماتریسی زیر نیز نوشت:

$$\begin{bmatrix} P^{(n+1)} \\ G^{(n+1)} \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} P^{(n)} \\ G^{(n)} \end{bmatrix} \quad (28)$$

به طوری که  $\mathbf{A}$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & \Delta t \\ \frac{\gamma}{\Delta t} \left[ \left( \sum_{k=0}^M C_{\gamma k} J_{\gamma k} Q_{\gamma k} \right) - 1 \right] & \left[ \gamma \sum_{k=0}^M C_{\gamma k} J_{\gamma k} Q_{\gamma k} - 1 \right] \end{pmatrix} \quad (29)$$

بنابراین با بازنویسی مجدد می‌توان رابطه نهایی انتگرال‌گیر



شکل ۱- نمایش لحظه‌ای میدان موج با استفاده از روش تفاضلات محدود: الف) مدل ساده چندلایه‌ای زمین با سرعت‌های مختلف، ب) نمایش لحظه‌ای میدان موج بعد از زمان ۵۰۰ میلی ثانیه از انتشار موجک چشمه، ج) نمایش لحظه‌ای میدان موج بعد از زمان ۱/۲ ثانیه، د) نمایش لحظه‌ای میدان موج بعد از زمان ۱/۵ ثانیه

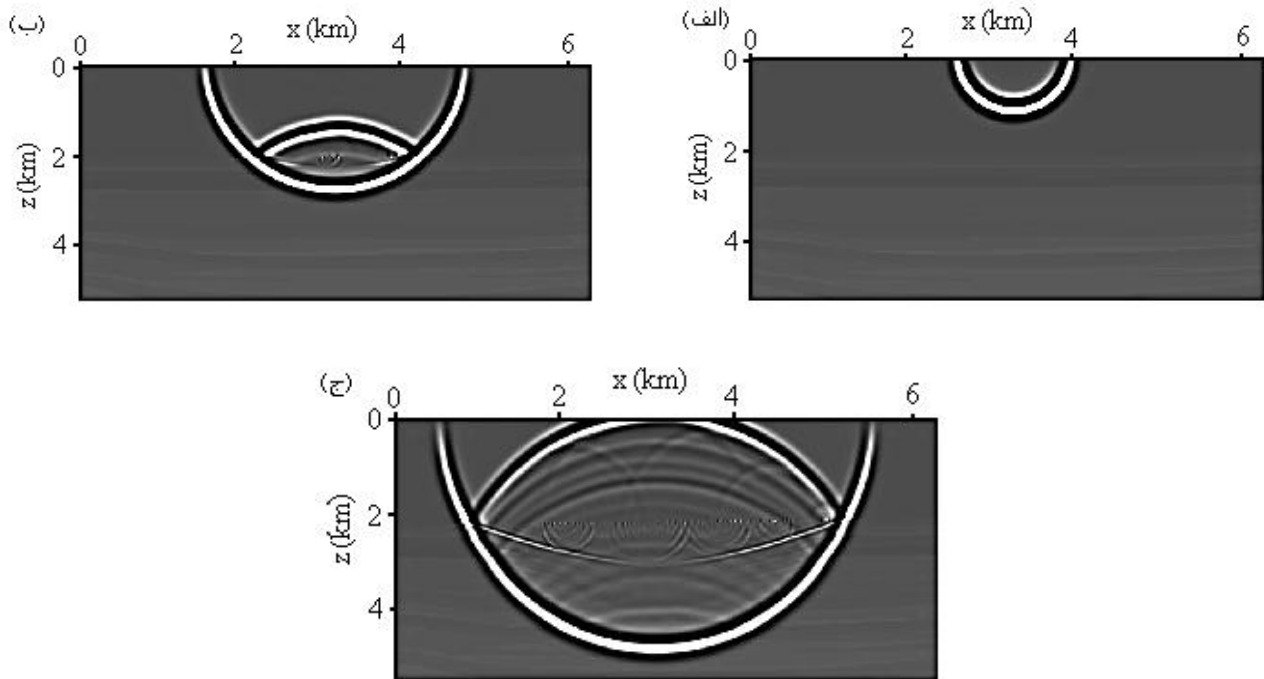
نشان می‌دهد که نتیجه برون‌یابی میدان موج حاصل از روش ترکیبی اوپلر در مقایسه با روش تفاضلات محدود دقیق‌تر و با کیفیت و جزئیات بیشتری انجام شده است. دقت برون‌یابی میدان موج برای این دو روش در شکل (۳) نشان داده شده است که بیانگر دقت بالای برون‌یابی به روش ترکیبی اوپلر در مقابل روش تفاضلات محدود است.

### ۵- نتیجه‌گیری

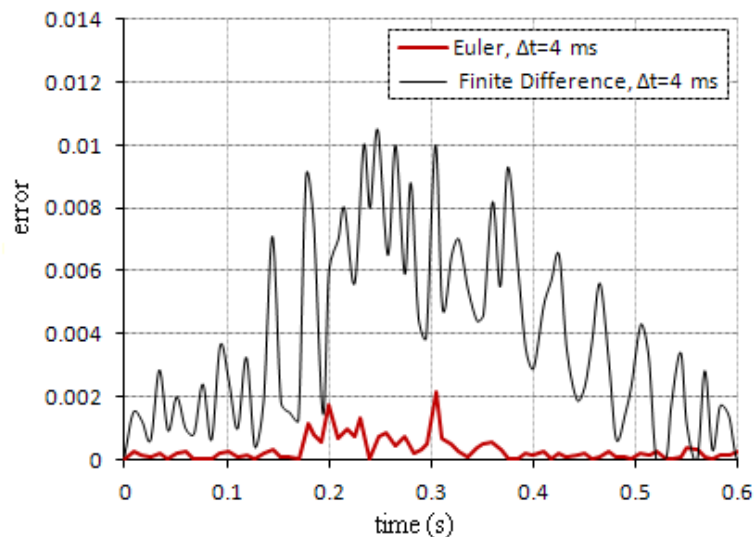
برون‌یابی میدان موج توسط روش‌های عددی متعدد از جمله روش تفاضلات محدود به‌عنوان یک روش سستی و مرسوم انجام می‌شود. از آنجایی که کاهش دقت و پراکنندگی عددی با بزرگ‌تر شدن فواصل زمانی ( $\Delta t$ ) از جمله محدودیت‌های روش تفاضلات محدود است. یکی از راهکارهای حل این مشکل استفاده از انتگرال‌گیری ترکیبی است که با افزایش فواصل زمانی دچار پراکنندگی عددی نشده و دقت آن نسبت به روش

مختلف موج فشار شیء (موج P) برای انتشار میدان موج در نظر گرفته شده است (شکل ۱- الف). برای مدل‌سازی لرزه‌ای انتشار میدان موج از یک موجک ریکر<sup>۱۵</sup> در یک نقطه سطحی استفاده شده است. حداکثر فرکانس مورد استفاده ۵۰ هرتز است. فاصله شبکه‌ای افقی و عمودی  $\Delta x$  و  $\Delta z$  به ترتیب برابر ۱۵ متر و گام زمانی برابر ۴ میلی‌ثانیه در نظر گرفته شده است. با مشخصات ارائه شده در مورد موجک ریکر مورد استفاده، برون‌یابی میدان موج در مورد مدل شکل (۱- الف) و با استفاده از معادله (۳۰) انجام شده است.

در شکل‌های (۱- ب)، (۱- ج) و (۱- د) نمایش لحظه‌ای میدان موج صوتی محاسبه شده با روش تفاضلات محدود برای مدل داده شده در زمان‌های مختلف نشان داده شده است. همچنین نمایش لحظه‌ای میدان موج صوتی محاسبه شده با روش ترکیبی اوپلر در شکل‌های (۲- الف)، (۲- ب) و (۲- ج) نشان داده شده است. مقایسه دو شکل (۱) و (۲)، به‌وضوح



شکل ۲- نمایش لحظه‌ای میدان موج با استفاده از روش ترکیبی اولر: الف) مدل ساده چندلایه‌ای زمین با سرعت‌های مختلف، ب) نمایش لحظه‌ای میدان موج بعد از زمان ۵۰۰ میلی ثانیه از انتشار موجک چشمه، ب) نمایش لحظه‌ای میدان موج بعد از زمان ۱/۲ ثانیه، ج) نمایش لحظه‌ای میدان موج بعد از زمان ۱/۵ ثانیه



شکل ۳- خطای حاصل از برون‌یابی میدان موج به روش تفاضلات محدود و روش ترکیبی اولر

برون‌یابی میدان موج به روش ارائه شده با روش تفاضلات محدود در قالب یک آنالیز عددی مقایسه شد که نشان‌دهنده برتری و دقت بالاتر روش ترکیبی اولر در مقایسه با روش

تفاضلات محدود بیشتر است. در این مطالعه پس از ارائه استدلال‌های مورد نیاز ریاضیاتی، روش ترکیبی انتگرال‌گیر اولر برای برون‌یابی میدان موج معرفی شد. همچنین نتایج حاصل از



## واژه‌نامه

- |                           |                                       |                                    |
|---------------------------|---------------------------------------|------------------------------------|
| 1. acoustic wave equation | 7. Poisson bracket                    | 12. modified Chebyshev polynomials |
| 2. Cartesian coordinates  | 8. formal solution                    | 13. truncate                       |
| 3. recursive              | 9. non-commutative operator (Abelian) | 14. central finite difference      |
| 4. non-recursive          | 10. trivial solution                  | 15. Ricker wavelet                 |
| 5. ray tracing            | 11. Bessel function                   |                                    |
| 6. pulse distortion       |                                       |                                    |

## مراجع

- Claerbout, J., *Imaging the Earth's Interior*, 414, Blackwell Scientific Publications, Oxford, 1985.
- Li, Z., "Compensating Finite-Difference Errors in 3-D Migration and Modelling", *Geophysics*, Vol. 56, pp. 1650-1660, 1991.
- Kelly, K. R., Ward, R., Treitel, W. S., and Alford, R. M., "Synthetic Seismograms: A Finite-Difference Approach", *Geophysics*, Vol. 41, pp. 2-27, 1976.
- Virieux, J., "P-SV Wave Propagation in Heterogeneous Media: Velocity Stress Finite Difference Method", *Geophysics*, Vol. 51, pp. 889-901, 1986.
- Igel, H., Mora, P., and Rioulet, B., "Anisotropic Wave Propagation through Finite-Difference Grids", *Geophysics*, Vol. 60, pp. 1203-1216, 1995.
- Etgen, J. T., and O'Brien, M. J., "Computational Methods for Large-Scale 3D Acoustic Finite-Difference Modeling, A Tutorial", *Geophysics*, Vol. 72, pp. SM223-SM230, 2007.
- Bansal, R., and Sen, M. K., "Finite-Difference Modelling of S-Wave Splitting in Anisotropic Media", *Geophysical Prospecting*, Vol. 56, pp. 293-312, 2008.
- Zhang, G., Zhang, Y., and Zhou, H., "Helical Finite-Difference Schemes for 3-D. Depth Migration", *69th Annual International Meeting, SEG, Expanded Abstracts*, pp. 862-865, 2000.
- Fei, T., and Liner, C. L., "Hybrid Fourier Finite Difference 3D Depth Migration for Anisotropic Media", *Geophysics*, Vol. 73, pp. S27-S34, 2008.
- Moradpouri, F., Moradzadeh A., Pestana R. C., Ghaedrahmati, R., and Soleimani Monfared, M., "Improvement of Seismic Imaging Condition to Suppress RTM Artifacts", *Geophysics*, Vol. 82, No. 6, pp. S403-S409, 2017.
- Skell, R. H., Zhang G., and Schlick T., "A Family of Symplectic Integrators: Stability, Accuracy, and Molecular Dynamics Applications", *SIAM Journal on Numerical Analysis*, Vol. 18, pp. 203-222, 1997.
- Yoshida, H., "Construction of Higher Order Symplectic Integrators", *Physics Letters A*, Vol. 150, pp. 262-268, 1990.
- Deriglazov, A. A., and Filgueiras, J. G., *Hamiltonian Formulation and Canonical Transformations in Classical Mechanics*, Library of Physics Publication, São Paulo, 2009.
- Chen, J., "Lax-Wendroff and Nyström Methods for Seismic Modelling", *Geophysical Prospecting*, Vol. 57, pp. 931-941, 2009.
- Pestana, R. C., and Stoffa, P. L., "Time Evolution of the Wave Equation using Rapid Expansion Method", *Geophysics*, Vol. 75, No. 4, pp. T121-T131, 2010.
- Tal-Ezer, H., Kosloff, D., and Koren, Z., "An Accurate Scheme for Forward Seismic Modelling", *Geophysical Prospecting*, Vol. 35, pp. 479-490, 1987.
- Kosloff, D., Filho, A., Tessmer, E., and Behle, A., "Numerical Solution of the Acoustic and Elastic Wave Equation by New Rapid Expansion Method", *Geophysical Prospecting*, Vol. 37, pp. 383-394, 1989.
- Moradpouri, F., Moradzadeh, A., Pestana, R. C., and Monfared, M. S., "Seismic Reverse Time Migration using a New Wave-Field Extrapolator and a New Imaging Condition", *Acta Geophysica*, Vol. 64, No. 5, pp. 1673-1690, 2016.
- Moradpouri, F., Moradzadeh, A., Pestana, R. C., and Monfared, M. S., "An Improvement in RTM Method to Image Steep Dip Petroleum Bearing Structures and its Superiority to Other Methods", *Journal of Mining and Environment*, Vol. 8, No. 4, pp. 573-578, 2017.