

## تحلیل غیرخطی خمش میکرو/نانوصفحات مستطیلی و قطاعی با تئوری مرتبه بالای برشی اصلاح شده و تئوری تنش کوپل اصلاح شده

محمد هاشمیان و مهرداد جبارزاده\*

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد مشهد، مشهد

(دریافت مقاله: ۱۳۹۸/۹/۲۹ - دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۹/۳/۲۷)

**چکیده** - در این مقاله، خمش غیرخطی میکرو/نانوصفحه مدرج تابعی مستطیلی و قطاعی، با استفاده از تئوری تنش کوپل اصلاح شده، بررسی شده است. بدین منظور، ضمن استفاده از یک تئوری مرتبه بالای برشی اصلاح شده و کرنش‌های غیرخطی و فرضیات فون کارمن، معادلات تعادل و شرایط مرزی حاکم توسط روش اصل حداقل انرژی پتانسیل برای صفحات مستطیلی و قطاعی محاسبه و ارائه شده و با استفاده از روش عددی درون‌یابی نیمه تحلیلی حل شده است. از مزایای تئوری تغییر شکل برشی استفاده شده، آن است که ضمن برطرف کردن نواقص تئوری‌های مرتبه بالای برشی، می‌توان از آن پاسخ تئوری‌های مرتبه اول و سوم برشی را نیز استخراج و نتایج را با یکدیگر مقایسه کرد. در ادامه، ضمن بررسی مزایای این تئوری، نتایج با دیگر تحقیقات اعتبارسنجی شده است و ضمن بررسی مقایسه انواع تئوری‌ها با یکدیگر، در انتها اثرات پارامترهای مقیاس طول، انواع شرایط مرزی، ضریب تابع توزیع توانی و ابعاد هندسی بررسی شده است.

**واژه‌های کلیدی:** خمش غیرخطی، تئوری تغییر شکل مرتبه بالای برشی اصلاح شده، تئوری تنش کوپل اصلاح شده، مواد مدرج تابعی، روش عددی درون‌یابی نیمه تحلیلی.

## Nonlinear Bending Analysis of Micro/Nano Rectangular and Annular Sector Plates Using a Modified Higher-Order Shear Deformation Theory and the Modified Couple Stress Theory

M. Hashemian and M. Jabbarzadeh\*

Department of Mechanical Engineering, Mashhad Branch, Islamic Azad University, Mashhad, Iran.

**Abstract:** In this paper, nonlinear bending analysis of functionally graded rectangular and sectorial micro/nano plates is investigated using the modified couple stress theory. For this purpose, a higher-order shear deformation theory and von Kármán

\*: مسئول مکاتبات، پست الکترونیکی: jabbarzadeh@mshdiau.ac.ir

geometrically nonlinear theory are employed. The equilibrium equations and the boundary conditions for rectangular and annular sector plates are derived from the principle of minimum total potential energy and solved using the Semi-Analytical Polynomial Method (SAPM). One of the advantages of the implemented shear deformation theory is removing the defects of higher order shear deformation theory, and obtaining the response of the first and the third-order shear deformation theories at the same time. Afterwards, beside investigating the benefits of this theory compared with other ones, the results are verified with those by other researches. At the end, the effects of length scale parameter, boundary conditions, power law index, and geometrical dimensions are investigated.

**Keywords:** Nonlinear Bending, Modified Higher-order Shear Deformation Theory (MHSdT), Modified Couple Stress Theory, Functionally Graded Material (FGM), Semi-analytical Polynomial Method (SAPM).

## فهرست علائم

$v$	جابه‌جایی در راستای $y$ و $\theta$	$a$	طول صفحه مستطیلی
$w$	جابه‌جایی در راستای $z$	$b$	عرض صفحه مستطیلی
$\alpha$	زاویه قطاع	$E$	مدول الاستیسیته
$\gamma_i$	مؤلفه کرنش برشی	$G$	مدول برشی
$\delta$	عملگر	$h$	ضخامت ثابت صفحه
$\varepsilon$	تانسور کرنش	$L$	پارامتر مقیاس طول ماده
$v_{rec}$	ضریب پواسون مستطیل	$M_i$	منتجه‌های گشتاور
$v_{sec}$	ضریب پواسون قطاع	$N_i$	منتجه‌های نیروی محوری
$\sigma$	تانسور تنش	$m$	جزء انحرافی تانسور تنش کوپل
$\varphi$	چرخش حول محور $y$ و $\theta$ (رابطه ۱)	$n$	ضریب تابع توزیع توانی
$\varphi'$	چرخش حول محور $y$ و $\theta$ (رابطه ۲)	$Q_i$	منتجه‌های نیروی برشی
$\chi$	تانسور متقارن انحناء	$q$	نیروی گسترده بر واحد سطح
$\psi$	چرخش حول محور $x$ و $r$ (رابطه ۱)	$r_i$	شعاع داخلی قطاع
$\psi'$	چرخش حول محور $x$ و $r$ (رابطه ۲)	$r_o$	شعاع خارجی قطاع
$\Pi$	انرژی پتانسیل کل سیستم	$T$	ترانهاد
$\Omega$	انرژی پتانسیل نیروهای خارجی	$U$	انرژی کرنشی سیستم
$\omega_i$	مؤلفه بردار چرخش	$u$	جابجایی در راستای $x$ و $r$

## ۱- مقدمه

مقاومت حرارتی و شیمیایی آن را بالا برده و واکنش آنها در برابر نور و تشعشعات دیگر را تغییر دهد. همچنین یکی از کاربردهای نانوذرات در تولید نانوکامپوزیت‌هایی بوده که در آن نسبت استحکام به وزن ماده کامپوزیتی افزایش می‌یابد. ایده مواد مدرج تابعی<sup>۲</sup> برای اولین بار در سال ۱۹۸۴ در ژاپن به منظور توسعه نسل جدیدی از مواد کامپوزیت، که قادر به مقاومت در محیط‌های حرارتی بدون تمرکز تنش هستند، مطرح شد [۲]. در مواد مدرج تابعی، به دلیل پیوستگی موجود در خواص مکانیکی، حرارتی و مغناطیسی، تنش‌ها

نانوتکنولوژی<sup>۱</sup>، توانمندی تولید مواد، ابزارها و سیستم‌های جدید با در دست گرفتن کنترل در سطوح مولکولی و اتمی است. از آنجا که رفتار مواد در مقیاس نانو با آنچه در ابعاد ماکرو وجود دارد متفاوت است، بنابراین، دانشمندان تئوری‌های مختلفی برای بررسی رفتار مواد در مقیاس نانو ارائه داده‌اند [۱]. به کارگیری نانوذرات در تولید مواد می‌تواند استحکام آن ماده را افزایش داده و وزن آن را کم کند،

خمش استاتیکی تیر تیموشنکو با استفاده از تئوری تنش کوپل اصلاح شده را مورد تحلیل قرار دادند. در این تحقیق ملاحظه شد خیز ایجاد شده توسط تئوری کلاسیک همیشه بزرگتر از مواردی است که توسط تنش کوپل اصلاح شده محاسبه می‌شود. خمش غیرخطی میکروصفحه دایروی براساس تئوری تنش کوپل اصلاح شده توسط وانگ و همکاران [۱۵] مورد تحقیق قرار گرفت. نتایج نشان می‌دهند که میکروصفحه مدل‌سازی شده با تئوری تنش کوپل اصلاح شده انعطاف‌پذیری کمتری نسبت به مدل طراحی شده با تئوری مکانیک محیط‌های پیوسته کلاسیک دارد. ژیان لی و همکاران [۱۶]، شکل بسته معادلات خمش استاتیکی و ارتعاشات آزاد یک میکروصفحه مستطیلی و قطاعی از ماده مدرج تابعی با تکیه‌گاه ساده را ارائه کردند. نتایج نشان می‌دهد که پارامتر مقیاس طول ماده، منجر به کاهش انعطاف‌پذیری میکروصفحه، کاهش خیز و افزایش بسامد طبیعی می‌شود. تحلیل خمش صفحه با مواد مدرج تابعی و تئوری تغییر شکل مرتبه سوم برشی به همراه اثرات تئوری تنش کوپل اصلاح شده توسط خراسانی و همکاران [۱۷]، در سال ۲۰۱۸ مورد پژوهش قرار گرفت. نتایج تحقیق نشان می‌دهند که با در نظر گرفتن پارامتر مقیاس طول در تئوری تنش کوپل اصلاح شده، انعطاف‌پذیری صفحه کمتر شده و خیزهای کوچک‌تری به دست خواهند آمد.

در تحقیق حاضر، تحلیل خمش غیرخطی میکرو/نانو صفحه قطاعی و مستطیلی از جنس مواد مدرج تابعی، براساس تئوری تغییر شکل مرتبه بالای برشی اصلاح شده<sup>۱۲</sup> و تئوری تنش کوپل اصلاح شده و همچنین روش عددی درون‌یابی نیمه تحلیلی<sup>۱۳</sup> بررسی شده است. معادلات تعادل و شرایط مرزی حاکم بر صفحه قطاعی و مستطیلی، با استفاده از تئوری‌های فوق و کرنش‌های غیرخطی با فرضیات فون کارمن، به روش اصل حداقل انرژی پتانسیل کل استخراج شده است. در ادامه، ضمن بررسی مزایای تئوری صفحه ذکر شده، اعتبارسنجی نتایج با دیگر تحقیقات انجام شده و اثرات پارامترهای مقیاس طول، شرایط مرزی، ضریب تابع توزیع توانی<sup>۱۴</sup> و ابعاد هندسی بررسی شده است. روش عددی مورد استفاده مشابه روش مربعات دیفرانسیلی بوده، با این تفاوت که به جای استفاده از مقادیر گره‌ای برای محاسبات، از مختصات گره‌ای استفاده کرده که

و گرادیان آنها حالت پیوسته‌ای پیدا کرده که باعث استحکام ماده می‌شوند. همچنین تغییرات تدریجی خواص در ساختار این مواد، موجب استحکام بین لایه‌های مختلف آن نیز می‌شود، در صورتی که در مواد کامپوزیتی، تداخل بین ساختارهای زمینه الیاف، باعث عدم هماهنگی در خواص مکانیکی می‌شود [۲].

به منظور تحلیل رفتار مکانیکی ساختارهای نانو، امروزه تحقیقات بسیاری انجام شده است. علاوه بر روش‌های آزمایشگاهی از روش‌های مدل‌سازی مانند: مدل‌سازی اتمی<sup>۳</sup>، مدل‌سازی ترکیبی مکانیک محیط‌های پیوسته- اتمی<sup>۴</sup> و مدل‌سازی مکانیک محیط‌های پیوسته<sup>۵</sup> برای بررسی رفتار مکانیکی نانومواد نیز استفاده می‌شود [۳]. در بررسی رفتار نانو ساختارها، روش مکانیک محیط‌های پیوسته روشی مؤثرتر و با فرمول‌بندی ساده‌تری خواهد بود و دلیل این قضیه این است که روش‌های شبیه‌سازی اتمی هزینه‌بر بوده و کنترل آزمایش‌ها در مقیاس نانو بسیار مشکل است [۴]. از این رو، مدل‌سازی مکانیک محیط‌های پیوسته که در آن اثرات اندازه در نظر گرفته می‌شود، نیز شامل روش‌های مختلفی نظیر: تئوری تنش کوپل<sup>۶</sup> [۵]، تئوری الاستیسیته گرادیان کرنشی اصلاح شده<sup>۷</sup> [۶]، تئوری تنش کوپل اصلاح شده<sup>۸</sup> [۷] و تئوری الاستیسیته غیرموضعی ارینگن<sup>۹</sup> [۸] است. از میان روش‌های فوق، در این تحقیق از تئوری تنش کوپل اصلاح شده استفاده شده که مقالات متعددی در این زمینه ارائه شده است. در سال ۲۰۰۲ یانگ و همکاران [۹] با اصلاح تئوری تنش کوپل ارائه شده توسط توپین [۱۰]، میندلین و تیرستن [۱۱] و میندلین [۱۲] در سال ۱۹۶۴، مدل تنش کوپل اصلاح شده که تنها دارای یک پارامتر مقیاس طول ماده<sup>۱۰</sup> برای در نظر گرفتن اثرات اندازه است را پیشنهاد کردند. در حالی که تئوری تنش کوپل کلاسیک دارای دو پارامتر مقیاس طول ماده است. همچنین در تئوری‌های الاستیسیته کلاسیک، انرژی کرنشی فقط به تانسور کرنش وابسته بوده، در صورتی که بر اساس تئوری تنش کوپل اصلاح شده، انرژی کرنشی تابعی از تانسور کرنش و گرادیان بردار چرخش<sup>۱۱</sup> است. ردی و کیم [۱۳]، اثرات تنش کوپل اصلاح شده روی صفحاتی از ماده مدرج تابعی با استفاده از تئوری تغییر شکل مرتبه سوم برشی را مورد بررسی قرار دادند. سیمسک و همکاران [۱۴]،

روش‌های عددی در مهندسی، سال ۴۰، شماره ۱، تابستان ۱۴۰۰

لازم به ذکر است که در این تحقیق، روابط در دو مختصات قطبی و کارتزین ارائه شده است. روابط مربوط به مختصات کارتزین برای تحلیل ورق مستطیلی در قسمت پیوست آمده است.

روابط کرنش غیرخطی با استفاده از فرضیات فون کارمن در دستگاه قطبی عبارتند از

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{E}} &= \frac{1}{r} \left[ (\nabla \bar{\mathbf{U}}) + (\nabla \bar{\mathbf{U}})^T + (\nabla \bar{\mathbf{U}}) \cdot (\nabla \bar{\mathbf{U}})^T \right] \\ \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 = \frac{\partial u_0}{\partial r} + z \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \\ &\quad + f(z) \frac{\partial \varphi'}{\partial r} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial w_0}{\partial r} \right)^2 \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{r} \left( u + \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 \right) = \frac{1}{r} (u_0 + z\varphi_1 + f(z)\varphi') \\ &\quad + \frac{\partial v_0}{\partial \theta} + z \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} + f(z) \frac{\partial \psi'}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial w_0}{\partial \theta} \right)^2 \\ \varepsilon_{zz} &= 0 \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u}{\partial \theta} - v \right) + \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \\ &= \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_0}{\partial \theta} + z \frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta} + f(z) \frac{\partial \varphi'}{\partial \theta} - v_0 - z\psi_1 - f(z)\psi' \right) \\ &\quad + \frac{\partial v_0}{\partial r} + z \frac{\partial \psi_1}{\partial r} + f(z) \frac{\partial \psi'}{\partial r} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial w_0}{\partial r} \frac{\partial w_0}{\partial \theta} \right) \\ \gamma_{rz} &= \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w_0}{\partial r} + \varphi_1 + f'(z)\varphi' \\ \gamma_{\theta z} &= \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial w_0}{\partial \theta} + \psi_1 + f'(z)\psi' \end{aligned} \quad (4)$$

در تئوری‌های الاستیسیته کلاسیک، انرژی کرنشی فقط به تانسور کرنش وابسته بوده، در صورتی که براساس تئوری تنش کوپل اصلاح شده، انرژی کرنشی تابعی از تانسور کرنش و گرادیان بردار چرخش است [۲۳].

در این تئوری، انرژی کرنشی به صورت رابطه (۵) ارائه می‌شود [۲۴]

$$U = \frac{1}{r} \int (\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{m} : \boldsymbol{\chi}) dv \quad (5)$$

در رابطه فوق،  $\boldsymbol{\sigma}$  تانسور تنش،  $\boldsymbol{\varepsilon}$  تانسور کرنش،  $\mathbf{m}$  جزء انحرافی تانسور تنش کوپل اصلاح شده و  $\boldsymbol{\chi}$  تانسور متقارن انحناء است. مؤلفه‌های  $m_{ij}$  طبق رابطه (۶) به دست می‌آید [۲۴].

$$m_{ij} = rGL^{\chi}_{ij} \quad (6)$$

که در آن  $G$  مدول برشی،  $L$  پارامتر مقیاس طول و  $\chi_{ij}$  مؤلفه تانسور متقارن انحناء نامیده می‌شوند. پارامتر  $\chi$  طبق رابطه (۷)

امتیازات مختلفی در محاسبات، از جمله سادگی روش نسبت به روش مربعات دیفرانسیلی را دارا است. امتیازات دیگر این روش، در بخش مربوط توضیح داده خواهد شد.

## ۲- روابط حاکم

امروزه تئوری‌های مختلفی به منظور تحلیل رفتار مکانیکی صفحات مورد استفاده قرار می‌گیرند. یکی از این تئوری‌ها، تئوری تغییر شکل مرتبه بالای برشی بوده که تابع جابه‌جایی آن در مختصات استوانه‌ای به صورت رابطه (۱) بیان می‌شود.

$$\begin{aligned} u(r, \theta, z) &= u_0(r, \theta) + z \frac{\partial w(r, \theta)}{\partial r} + f(z)\varphi(r, \theta) \\ v(r, \theta, z) &= v_0(r, \theta) + \frac{z}{r} \frac{\partial w(r, \theta)}{\partial \theta} + f(z)\psi(r, \theta) \\ w(r, \theta, z) &= w_0(r, \theta) \end{aligned} \quad (1)$$

$u$ ،  $v$  و  $w$  مؤلفه‌های بردار جابه‌جایی و  $u_0$ ،  $v_0$  و  $w_0$  مؤلفه‌های جابه‌جایی صفحه میانی هستند. در رابطه (۱)، عبارات  $\varphi$  و  $\psi$  به ترتیب معرف چرخش المان حول محور  $\theta$  و  $r$  هستند.

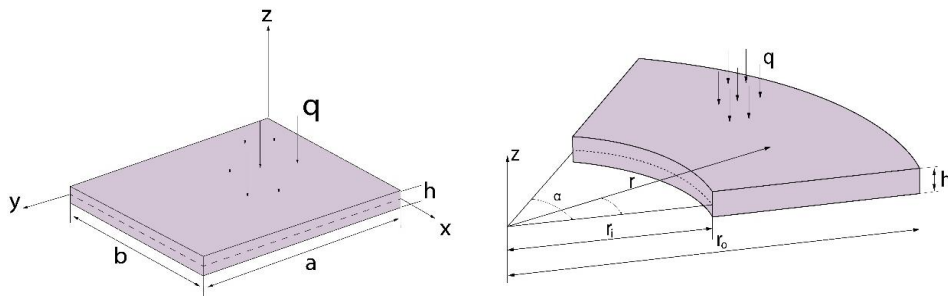
از تئوری فوق در تحقیقات مختلفی استفاده شده است [۱۸] و [۱۹]، اما ایرادی که این تئوری دارد آن است که شرط مرزی آزاد را به خوبی برقرار نمی‌کند. برای رفع این ایراد در سال ۲۰۱۷ دستجردی و همکاران [۱۸] تئوری تغییر شکل مرتبه بالای برشی اصلاح شده را ارائه کردند که تابع جابه‌جایی آن به صورت زیر است.

$$\begin{aligned} u(r, \theta, z) &= u_0(r, \theta) + z\varphi_1(r, \theta) + f(z)\varphi'(r, \theta) \\ v(r, \theta, z) &= v_0(r, \theta) + z\psi_1(r, \theta) + f(z)\psi'(r, \theta) \\ w(r, \theta, z) &= w_0(r, \theta) \end{aligned} \quad (2)$$

در این تئوری به منظور حل مشکلات ذکر شده در مورد تئوری مرتبه بالای برشی، توابع چرخش  $\frac{\partial w(r, \theta)}{\partial \theta}$  و  $\frac{\partial w(r, \theta)}{\partial r}$  با دو تابع غیروابسته  $\varphi'(r, \theta)$  و  $\psi'(r, \theta)$  جایگزین شده است.

$f(z)$  تابع توزیع نیروی برشی در راستای ضخامت صفحه بوده که در مراجع مختلف توابع گوناگونی برای آن در نظر گرفته شده است [۲۰]. در این تحقیق، تابع  $f(z)$  به صورت رابطه (۳) در نظر گرفته می‌شود [۲۱ و ۲۲].

$$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \quad (3)$$



شکل ۱- هندسه صفحات مستطیلی و قطاعی

منتجه‌های تنش و گشتاور به صورت رابطه (۱۰) تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} \{N_r, N_\theta, N_{r\theta}, Y_r, Y_\theta\} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \{\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_{r\theta}, m_r, m_\theta\} dz \\ \{M_r, M_\theta, M_{r\theta}, H_{rz}\} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \{\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_{r\theta}, m_{rz}\} z dz \\ \{R_r, R_\theta, R_{r\theta}, S_{rz}\} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \{\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_{r\theta}, m_{rz}\} f(z) dz \\ \{R_{rz}, R_{\theta z}, P_r, P_{r\theta}\} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \{\sigma_{rz}, \sigma_{\theta z}, m_r, m_{r\theta}\} f'(z) dz \\ \{G_{rz}, G_{\theta z}\} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \{m_{rz}, m_{\theta z}\} f''(z) dz \end{aligned} \quad (10)$$

برای تعیین معادلات تعادل و شرایط مرزی از اصل حداقل انرژی پتانسیل کل  $\Pi$  انرژی کرنشی سیستم و  $U$  انرژی خارجی باشد، براساس اصل حداقل انرژی پتانسیل کلوقتی سیستمی در حال تعادل است که تغییرات انرژی پتانسیل کل آن صفر باشد.

$$\delta \Pi = \delta U + \delta \Omega = 0 \quad (11)$$

که  $\delta$  نشانگر عملگر تغییرات است. مقادیر تغییرات انرژی کرنشی سیستم و انرژی پتانسیل بارهای خارجی به صورت روابط (۱۲) و (۱۳) به دست می‌آیند.

$$\begin{aligned} \delta U &= \iiint (\sigma_{rr} \delta \epsilon_{rr} + \sigma_{\theta\theta} \delta \epsilon_{\theta\theta} + 2\sigma_{r\theta} \delta \gamma_{r\theta} \\ &+ 2\sigma_{rz} \delta \gamma_{rz} + 2\sigma_{\theta z} \delta \gamma_{\theta z} + m_{rr} \delta \chi_{rr} + m_{\theta\theta} \delta \chi_{\theta\theta} \\ &+ 2m_{r\theta} \delta \chi_{r\theta} + 2m_{rz} \delta \chi_{rz} + 2m_{\theta z} \delta \chi_{\theta z}) r dr d\theta dz \end{aligned} \quad (12)$$

$$\delta \Omega = \int_{\theta_1}^{\theta_0} \int_{r_i}^{r_o} q \delta w \ r dr d\theta \quad (13)$$

بیان می‌شود [۲۴]:

$$\chi = \frac{1}{2} [\bar{\nabla} \bar{\omega} + (\bar{\nabla} \bar{\omega})^T] \quad (7)$$

که بردار چرخش طبق رابطه (۸) بیان می‌شود [۲۴]:

$$\bar{\omega} = \frac{1}{2} \bar{\nabla} \times \bar{U} \quad (8)$$

در این تحقیق، مؤلفه‌های تانسور متقارن انحناء عبارتند از:

$$\begin{aligned} \chi_{rr} &= \frac{1}{2} \left( \frac{-1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{\partial \psi_1}{\partial r} - f'(z) \frac{\partial \psi'}{\partial r} \right) \\ \chi_{\theta\theta} &= \frac{1}{2r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \psi_1 - f'(z) \psi' + \frac{\partial \phi_1}{\partial \theta} \right. \\ &\quad \left. + f'(z) \frac{\partial \phi'}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 w}{\partial \theta \partial r} \right) \\ \chi_{zz} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\psi_1 + f'(z) \psi'}{r} + \frac{\partial \psi_1}{\partial r} + f'(z) \frac{\partial \psi'}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \phi_1}{\partial \theta} \right. \\ &\quad \left. - \frac{f'(z) \partial \phi'}{\partial \theta} \right) \\ 2\chi_{r\theta} &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} - \frac{1}{r} f'(z) \frac{\partial \psi'}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \phi_1 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{r} f'(z) \phi' + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial \phi_1}{\partial r} + f'(z) \frac{\partial \phi'}{\partial r} - \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right) \\ 2\chi_{\theta z} &= \frac{1}{2r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{z}{r} \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} + \frac{f(z)}{r} \frac{\partial \psi'}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v}{\partial \theta \partial r} + z \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta \partial r} \right. \\ &\quad \left. + f(z) \frac{\partial^2 \psi'}{\partial \theta \partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - \frac{z}{r} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \theta^2} - \frac{f(z)}{r} \frac{\partial^2 \phi'}{\partial \theta^2} \right. \\ &\quad \left. + r f''(z) \phi' \right) \\ 2\chi_{rz} &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} + \frac{z}{r} \frac{\partial \psi_1}{\partial r} - \frac{z \psi_1}{r^2} + \frac{f(z)}{r} \frac{\partial \psi'}{\partial r} \right. \\ &\quad - \frac{f(z) \psi'}{r^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + z \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial r^2} + f(z) \frac{\partial^2 \psi'}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \\ &\quad - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} + \frac{z}{r} \frac{\partial \phi_1}{\partial \theta} - \frac{z}{r} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial r \partial \theta} \\ &\quad \left. + \frac{f(z)}{r} \frac{\partial \phi'}{\partial \theta} - \frac{f(z)}{r} \frac{\partial^2 \phi'}{\partial r \partial \theta} - f''(z) \psi' \right) \end{aligned} \quad (9)$$

شکل (۱) هندسه صفحه قطاعی و مستطیلی را نشان می‌دهد.

تکیه‌گاه ساده:

$$\begin{aligned}
 u_r = v_r = w_r = \psi_r = \psi'_r = M_r + \frac{Y_{r\theta}}{\gamma} + R_r \\
 + \frac{P_{r\theta}}{\gamma} = \frac{Y_{rz}}{\gamma} = \frac{H_{rz}}{\gamma} = \frac{S_{rz}}{\gamma} = 0, \quad r = r_1, r_0 \\
 u_r = v_r = w_r = \phi_r = \phi'_r = M_\theta \\
 + \frac{Y_{r\theta} + H_{\theta z}}{\gamma} = R_\theta + \frac{P_{r\theta} + S_{\theta z}}{\gamma} = \frac{Y_{\theta z}}{\gamma} \\
 = \frac{H_{\theta z}}{\gamma} = \frac{S_{\theta z}}{\gamma} = 0, \quad \theta = 0, \alpha \quad (15)
 \end{aligned}$$

تکیه‌گاه گیردار:

$$\begin{aligned}
 u_r = v_r = w_r = \phi_r = \phi'_r = \psi_r = \psi'_r = 0, \quad r = r_1, r_0 \\
 u_r = v_r = w_r = \phi_r = \phi'_r = \psi_r = \psi'_r = 0, \quad \theta = 0, \alpha \quad (16)
 \end{aligned}$$

تکیه‌گاه آزاد:

$$\begin{aligned}
 N_r = N_{r\theta} + \frac{Y_{rz}}{\gamma} - \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{Y_{\theta z}}{\gamma} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{Y_{rz}}{\gamma} \right) \\
 = N_{r\theta} \frac{\partial w}{\partial \theta} + r N_r \frac{\partial w}{\partial r} + r Q_r + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{Y_\theta}{\gamma} \right) \\
 + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{Y_{r\theta}}{\gamma} \right) = M_r + \frac{Y_{r\theta}}{\gamma} = R_r + \frac{P_{r\theta}}{\gamma} \\
 = M_{r\theta} - \frac{Y_r}{\gamma} + \frac{Y_z}{\gamma} + \frac{H_{rz}}{\gamma} - \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{H_{\theta z}}{\gamma} \right) \\
 - \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{H_{rz}}{\gamma} \right) = R_{r\theta} - \frac{P_r}{\gamma} + \frac{P_z}{\gamma} + \frac{S_{rz}}{\gamma} \\
 - \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{S_{\theta z}}{\gamma} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{S_{rz}}{\gamma} \right) = Y_r = Y_{r\theta} \\
 = Y_{rz} = H_{rz} = S_{rz} = 0, \quad r = r_1, r_0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 N_{r\theta} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{Y_{\theta z}}{\gamma} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{Y_{rz}}{\gamma} \right) + \frac{Y_{rz}}{\gamma} \\
 = N_\theta + \frac{Y_{\theta z}}{\gamma} = N_\theta \frac{\partial w}{\partial \theta} + N_{r\theta} \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{Y_r}{\gamma} + \frac{Y_\theta}{\gamma} \\
 + Q_\theta - \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{Y_{r\theta}}{\gamma} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{Y_r}{\gamma} \right) = M_{r\theta} + \frac{Y_\theta}{\gamma} - \frac{Y_z}{\gamma} \\
 + \frac{H_{rz}}{\gamma} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{H_{\theta z}}{\gamma} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{H_{rz}}{\gamma} \right) \\
 = R_{r\theta} + \frac{P_\theta}{\gamma} - \frac{P_z}{\gamma} + \frac{S_{rz}}{\gamma} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{S_{\theta z}}{\gamma} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{S_{rz}}{\gamma} \right) \\
 = M_\theta - \frac{Y_{r\theta}}{\gamma} + \frac{H_{\theta z}}{\gamma} = R_\theta - \frac{P_{r\theta}}{\gamma} + \frac{S_{\theta z}}{\gamma} = Y_\theta \\
 = Y_{r\theta} = Y_{\theta z} = H_{\theta z} = S_{\theta z} = 0, \quad \theta = 0, \alpha \quad (17)
 \end{aligned}$$

در این تحقیق ماده مدرج تابعی در نظر گرفته شده است. تغییرات خواص در راستای ضخامت به صورت

$$E(z) = (E_C - E_M) \cdot \left( \frac{1}{\gamma} + \frac{z}{h} \right)^n + E_M \quad n \geq 0 \quad (18)$$

در نظر گرفته شده است [24].

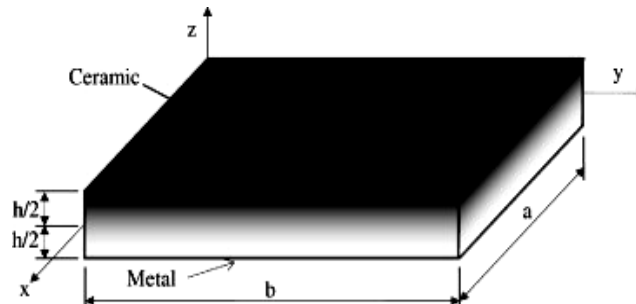
که  $E_C$  و  $E_M$  به ترتیب مدول یانگ سرامیک و فلز بوده و  $n$  ضریب تابع توزیع توانی است. شکل (2) یک صفحه ساخته شده از مواد مدرج تابعی را نشان می‌دهد.

در رابطه (13)،  $r_0$  و  $r_1$  به ترتیب شعاع داخلی و خارجی قطاع و  $q$  بار اعمالی بر واحد سطح هستند.

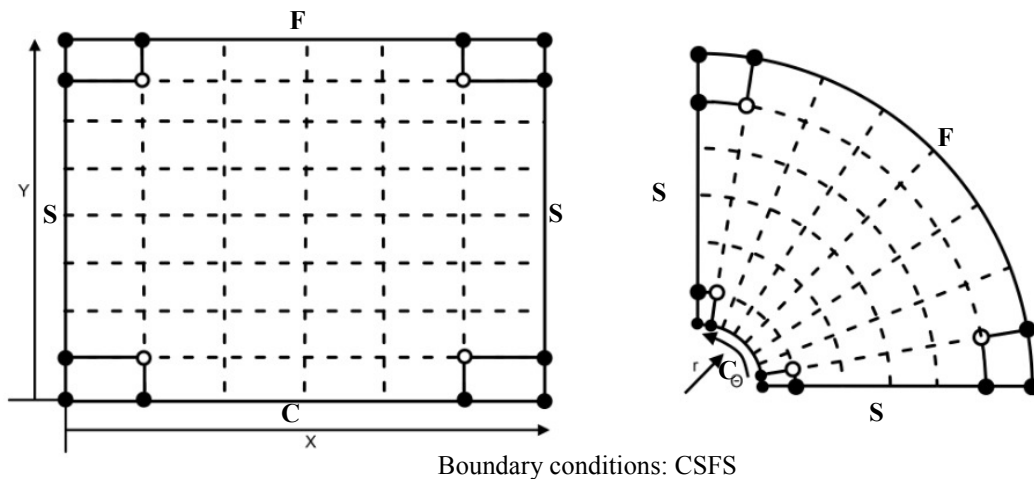
بنابراین، معادلات تعادل برای یک صفحه قطاعی با استفاده از تئوری تغییر شکل مرتبه بالای برشی اصلاح شده و همچنین تئوری تنش کوپل اصلاح شده به صورت رابطه (14) به دست می‌آیند.

$$\begin{aligned}
 \delta u_r : N_\theta + \frac{\partial}{\partial r} (-r N_r) + \frac{\partial}{\partial \theta} (-N_{r\theta} - \frac{Y_{rz}}{\gamma}) \\
 + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left( \frac{-Y_{\theta z}}{\gamma} \right) + \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} \left( \frac{-Y_{rz}}{\gamma} \right) = 0 \\
 \delta v_r : -N_{r\theta} - \frac{Y_{rz}}{\gamma} + \frac{\partial}{\partial r} (-r N_{r\theta} - \frac{Y_{rz}}{\gamma}) + \frac{\partial}{\partial \theta} (-N_\theta \\
 - \frac{Y_{\theta z}}{\gamma}) + \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left( \frac{r Y_{rz}}{\gamma} \right) + \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} \left( \frac{Y_{\theta z}}{\gamma} \right) = 0 \\
 \delta w_r : \frac{\partial}{\partial r} (-r N_r) \frac{\partial w}{\partial r} - N_{r\theta} \frac{\partial w}{\partial \theta} - r Q_r - \frac{Y_{r\theta}}{\gamma} + \frac{\partial}{\partial \theta} \\
 \left( -\frac{1}{r} N_\theta \frac{\partial w}{\partial \theta} - N_{r\theta} \frac{\partial w}{\partial r} - Q_\theta + \frac{Y_r}{\gamma} - \frac{Y_\theta}{\gamma} \right) \\
 + \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left( \frac{-r Y_{r\theta}}{\gamma} \right) + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left( \frac{Y_{r\theta}}{\gamma} \right) + \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} \left( \frac{Y_r}{\gamma} \right) \\
 + \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} \left( \frac{-Y_\theta}{\gamma} \right) + r q(r) = 0 \\
 \delta \phi_r : M_\theta + r Q_r - \frac{Y_{r\theta}}{\gamma} + \frac{\partial}{\partial r} (-r M_r - \frac{r Y_{r\theta}}{\gamma}) \\
 + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( -M_{r\theta} - \frac{Y_\theta}{\gamma} + \frac{Y_z}{\gamma} - \frac{H_{rz}}{\gamma} \right) \\
 + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left( \frac{-H_{\theta z}}{\gamma} \right) + \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} \left( \frac{-H_{rz}}{\gamma} \right) = 0 \\
 \delta \phi'_r : R_\theta + r R_{r\theta} - \frac{P_{r\theta}}{\gamma} + \frac{r G_{\theta z}}{\gamma} + \frac{\partial}{\partial r} (-r R_r \\
 - \frac{r P_{r\theta}}{\gamma}) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( -R_{r\theta} - \frac{P_\theta}{\gamma} + \frac{P_z}{\gamma} - \frac{S_{rz}}{\gamma} \right) \\
 + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left( \frac{-S_{\theta z}}{\gamma} \right) + \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} \left( \frac{-S_{rz}}{\gamma} \right) = 0 \\
 \delta \psi_r : -M_{r\theta} + r Q_\theta - \frac{Y_\theta}{\gamma} + \frac{Y_z}{\gamma} - \frac{H_{rz}}{\gamma} \\
 + \frac{\partial}{\partial r} \left( -r M_{r\theta} + \frac{r Y_r}{\gamma} - \frac{r Y_z}{\gamma} - \frac{r H_{rz}}{\gamma} \right) \\
 + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( -M_\theta + \frac{Y_{r\theta}}{\gamma} - \frac{H_{\theta z}}{\gamma} \right) + \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left( \frac{r H_{rz}}{\gamma} \right) \\
 + \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} \left( \frac{H_{\theta z}}{\gamma} \right) = 0 \\
 \delta \psi'_r : -R_{r\theta} + r R_{\theta z} - \frac{P_\theta}{\gamma} + \frac{P_z}{\gamma} - \frac{S_{rz}}{\gamma} - \frac{r G_{rz}}{\gamma} \\
 + \frac{\partial}{\partial r} \left( -r R_{r\theta} + \frac{r P_r}{\gamma} - \frac{r P_z}{\gamma} - \frac{r S_{rz}}{\gamma} \right) + \frac{\partial^2}{\partial \theta} (-R_\theta \\
 + \frac{P_{r\theta}}{\gamma} - \frac{S_{\theta z}}{\gamma}) + \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left( \frac{r S_{rz}}{\gamma} \right) + \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} \left( \frac{S_{\theta z}}{\gamma} \right) = 0 \quad (14)
 \end{aligned}$$

همچنین شرایط مرزی عبارتند از:



شکل ۲- هندسه صفحه از جنس مواد مدرج تابعی [۲۶]



Boundary conditions: CSFS

شکل ۳- توصیف شرایط مرزی قطاع و مستطیل به صورت تکیه‌گاه گیردار، ساده و آزاد و توزیع گره‌ها در هندسه صفحه مستطیلی و قطاعی

دیفرانسیلی از یک درون‌یاب استفاده می‌شود که برخلاف روش مربعات دیفرانسیلی که براساس مقادیر گره‌ای بوده، چند جمله‌ای براساس مختصات گره‌ای پیشنهاد می‌شود که باعث ایجاد امتیازات مختلفی در حل خواهد شد و هر معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی یا مجموعه‌ای از سیستم معادلات دیفرانسیل جزئی به سادگی و به سرعت با توجه به انواع مختلف شرایط مرزی قابل حل است [۲۱]. از امتیازات این روش آن است که ضمن سادگی آن برای حل معادلات، می‌توان به کمک آن مسائل با شرط مرزی متغیر [۲۵] را حل کرد. برای یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی، ابتدا یک چند جمله‌ای برای ضرایب مجهول براساس ضرایب خیام-نیوتن و با توجه به تعداد گره‌ها در هر راستا در نظر گرفته می‌شود. همچنین درون‌یابی در این روش براساس مختصات گره‌ای انجام شده که باعث حل ساده‌تر معادلات می‌شود. در روش عددی درون‌یابی

شرایط مرزی که در این تحقیق مورد بررسی قرار گرفته به صورت شکل (۳) که شامل تکیه‌گاه ساده<sup>۱۵</sup>، گیردار<sup>۱۶</sup> و آزاد<sup>۱۷</sup> بوده، برای صفحات قطاعی و مستطیلی نشان داده شده است.

### ۳- روش عددی

از آنجا که معادلات تعادل به صورت غیرخطی هستند، راه حل تحلیلی برای حل معادلات با مشتقات جزئی به دست آمده وجود نداشته، بنابراین باید از یک روش عددی و یا نیمه تحلیلی برای حل معادلات استفاده شود. در روش حل عددی درون‌یابی نیمه تحلیلی که برای اولین بار در سال ۲۰۱۷ توسط دستجردی و همکاران [۱۸] مطرح شد، هر متغیری در معادله دیفرانسیل توسط یک درون‌یاب، بسته به توزیع نقاط گره‌بندی، تخمین زده می‌شود.

در روش عددی درون‌یابی نیمه تحلیلی مانند روش مربعات

روش‌های عددی در مهندسی، سال ۴۰، شماره ۱، تابستان ۱۴۰۰

$q = 1 \text{ Pa}$  در نظر گرفته شده است. دلیل انتخاب این مقادیر این است که برای اعتبارسنجی نتایج صفحه قطاعی و مستطیلی به ترتیب از مراجع [۲۴ و ۲۶] استفاده شده است. سایر پارامترها به شرح زیر هستند:

$$\begin{aligned} h &= 17.6 \times 10^{-6} \text{ m}, \\ v_{\text{sec}} &= 0/3, \quad v_{\text{rec}} = 0/38, \\ \alpha &= \frac{\pi}{6}, \quad \frac{r_1}{r_0} = 0/5, \\ \frac{h}{r_0 - r_1} &= \frac{1}{100}, \\ \frac{h}{a} &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$

در ابتدا جهت بررسی دقت روش، تأثیر تعداد گره‌ها بر نتایج در شکل (۴) ارائه شده است. ملاحظه می‌شود که با افزایش تعداد گره‌ها، مقدار خیز بی‌بعد از گره هفتم به بعد تقریباً ثابت شده، لذا در این تحقیق هفت گره در راستای راستای  $r$  و  $\theta$  در نظر گرفته شده است.

در شکل (۵) نمودار تغییرات خیز بی‌بعد نسبت به ضریب تابع توزیع توانی برای مقادیر مختلف پارامتر مقیاس طول رسم شده است. از نتایج ملاحظه می‌شود که در ضرایب توزیع توانی کوچک که ماده به سمت سرامیک میل می‌کند، تغییر پارامتر مقیاس طول تأثیر چندانی بر نتایج ندارد. اما با افزایش ضریب تابع توزیع توانی (افزایش انعطاف‌پذیری ماده) تأثیر تغییرات پارامتر مقیاس طول بر نتایج بیشتر می‌شود. در ادامه می‌توان یافت که با افزایش ضریب تابع توزیع توانی در یک ماده مدرج تابعی، حداکثر خیز بی‌بعد صفحه نیز افزایش پیدا می‌کند. به عبارت دیگر هر چه ماده نرم‌تر بوده یا به سمت فلز کامل میل کند (با توجه به تابع توزیع توانی)، افزایش خیز مشهودتر است. همچنین تأثیر افزایش پارامتر مقیاس طول در شرایط با درجات آزادی بالاتر بیشتر خواهد بود.

برای بررسی دقت نتایج ارائه شده، حداکثر خیز بی‌بعد صفحات قطاعی و مستطیلی ساخته شده از مواد مدرج تابعی تحت بار گسترده یکنواخت  $q = 1 \text{ Pa}$ ، بررسی شده و با نتایج مراجع [۲۴ و ۲۶] مقایسه شده است. در مقالات فوق به ترتیب از تئوری تغییر شکل مرتبه اول برشی با کرنش‌های غیرخطی و تئوری تنش کوپل اصلاح

نیمه تحلیلی، یک معادله دیفرانسیل و همین‌طور تابع دو متغیره در نظر گرفته شده که در مختصات استوانه‌ای به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^n f(r, \theta)}{\partial r^n} + \frac{\partial^{(n-1)} f(r, \theta)}{\partial^{(n-1)} r} + \dots + \frac{\partial f(r, \theta)}{\partial r} \\ &+ \frac{\partial^n f(r, \theta)}{\partial^n \theta} + \frac{\partial^{(n-1)} f(r, \theta)}{\partial^{(n-1)} \theta} + \dots + \frac{\partial f(r, \theta)}{\partial \theta} \\ &+ \dots = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

$$f(r, \theta) = \sum_{k=1}^N \sum_{t=1}^M a_{(k+t-(1-(k-1)(M-1)))} r^{(k-1)} \theta^{(t-1)} \quad (20)$$

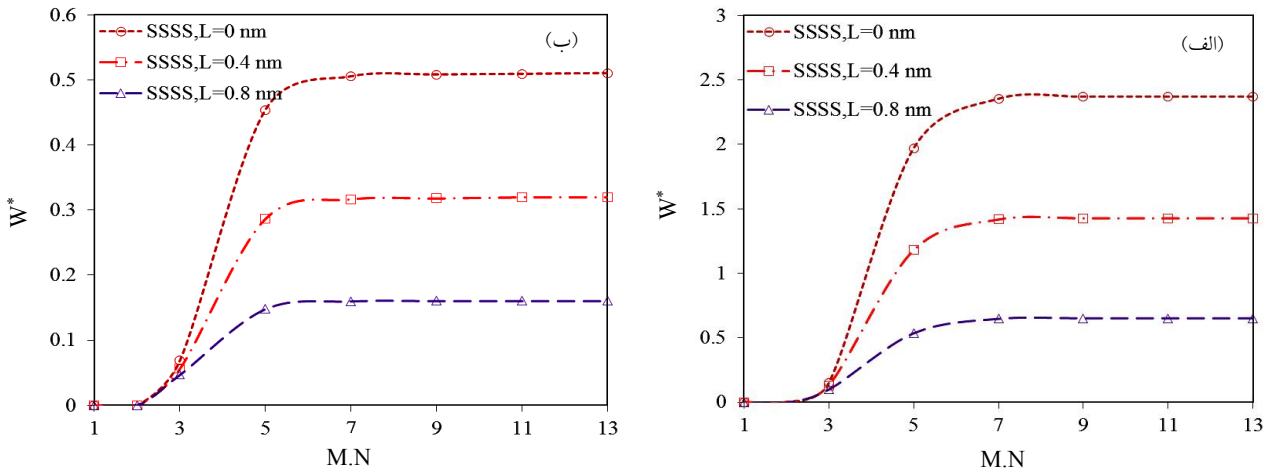
در رابطه (۲۰)،  $N$  و  $M$  به ترتیب تعداد گره‌ها در راستای  $r$  و  $\theta$  هستند. با جایگذاری رابطه (۲۰) در رابطه (۱۹) معادلات دیفرانسیل جزئی به معادلات جبری تبدیل خواهند شد. بنابراین، تعداد  $M.N$  معادله جبری و  $M.N$  مجهول که در مجموع  $a_i$  نامیده می‌شوند خواهیم داشت. با فرض  $a_i = 1, \dots, M.N$ ، در رابطه (۲۱) توابع درون‌یاب میدان جابه‌جایی به صورت رابطه زیر بیان خواهند شد. شکل (۳) توزیع گره‌ها در هندسه صفحه مستطیلی و قطاعی را نشان می‌دهد.

$$\begin{aligned} u_0 &= \sum_{k=1}^N \sum_{t=1}^M a_{(k+t-(1-(k-1)(M-1)))} r^{(k-1)} \theta^{(t-1)} \\ v_0 &= \sum_{k=1}^N \sum_{t=1}^M a_{(k+t-(1-(k-1)(M-1))+M.N)} r^{(k-1)} \theta^{(t-1)} \\ w_0 &= \sum_{k=1}^N \sum_{t=1}^M a_{(k+t-(1-(k-1)(M-1))+2M.N)} r^{(k-1)} \theta^{(t-1)} \\ \varphi &= \sum_{k=1}^N \sum_{t=1}^M a_{(k+t-(1-(k-1)(M-1))+3M.N)} r^{(k-1)} \theta^{(t-1)} \\ \varphi' &= \sum_{k=1}^N \sum_{t=1}^M a_{(k+t-(1-(k-1)(M-1))+4M.N)} r^{(k-1)} \theta^{(t-1)} \\ \psi &= \sum_{k=1}^N \sum_{t=1}^M a_{(k+t-(1-(k-1)(M-1))+5M.N)} r^{(k-1)} \theta^{(t-1)} \\ \psi' &= \sum_{k=1}^N \sum_{t=1}^M a_{(k+t-(1-(k-1)(M-1))+6M.N)} r^{(k-1)} \theta^{(t-1)} \end{aligned} \quad (21)$$

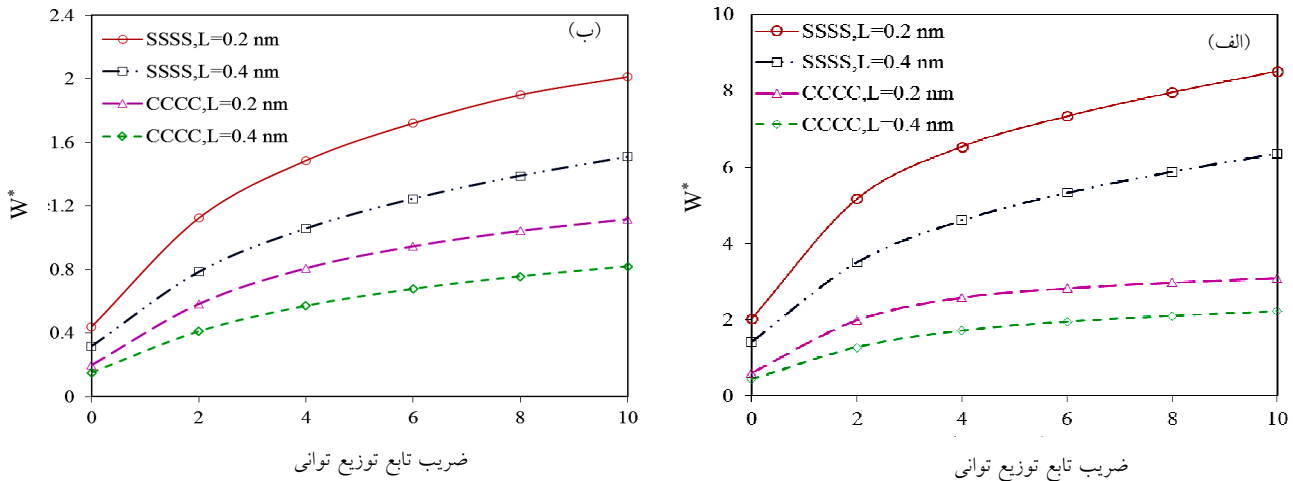
#### ۴- نتایج عددی

برای تعیین نتایج عددی، یک صفحه قطاعی و مستطیلی از مواد مدرج تابعی با ضخامت ثابت  $h$ ، مدول یانگ سرامیک و فلز به ترتیب  $E_c = 14/4 \text{ GPa}$ ،  $E_M = 1/24 \text{ GPa}$  بار یکنواخت





شکل ۴ - تغییرات حداکثر خیز بی بعد بر حسب تغییرات تعداد گره برای شرایط مرزی ساده و مقادیر مختلف پارامتر مقیاس طول در الف) صفحه قطاعی و ب) صفحه مستطیلی (رنگی در نسخه الکترونیکی)



شکل ۵ - تغییرات حداکثر خیز بی بعد بر حسب تغییرات ضریب تابع توزیع توانی ماده مدرج تابعی برای مقادیر مختلف پارامتر مقیاس طول در الف) صفحه قطاعی و ب) صفحه مستطیلی (رنگی در نسخه الکترونیکی)

گسترده یکنواخت  $q=1 Pa$ ، نسبت به پارامتر مقیاس طول را نشان می دهد. مشاهده می شود با افزایش پارامتر مقیاس طول، انعطاف پذیری صفحه کاهش یافته و خیز بی بعد کم می شود. همچنین ملاحظه می شود هر چه درجه آزادی شرط مرزی کمتر شود (مانند تکیه گاه گیردار)، تأثیر افزایش پارامتر مقیاس طول بر روی خیز بی بعد کمتر است، در حالی که در حالت تکیه گاه آزاد خیز با شیب تندتری کاهش یافته و تأثیر پارامتر

شده استفاده شده است. همچنین در ارائه نتایج، خیز بی بعد برای

$$\text{صفحه قطاعی [۲۴] به صورت } w^* = \frac{wE_c h^3 \times 10^3}{12q(1-\nu^2)(r_0-r_1)^4} \text{ و برای}$$

$$\text{صفحه مستطیلی [۲۶] به صورت } w^* = \frac{wE_m h^3}{qa^4} w \left( \frac{a}{2}, \frac{b}{2} \right) \times 10^2$$

بیان می شود. لازم به ذکر است که شرط مرزی انتخاب شده در این حالت نیز ساده در نظر گرفته شده است (جدول های ۱ و ۲).

شکل (۶) نمودار تغییرات خیز بی بعد صفحه، تحت بار

جدول ۱- مقایسه خیز بی‌بعد صفحه قطاعی در تحقیق حاضر و مرجع [۲۴]

$$w^* = \frac{E_c h^3 w}{(12q(1-\nu^2)(r_0 - r_1)^4)} \times 10^3$$

$\alpha$	منبع	h		
		$(r_0 - r_1)$	۰/۰۵	۰/۰۱
$\frac{\pi}{6}$	تحقیق حاضر	۲/۳۹۸۴	۲/۳۶۲۰	۲/۵۱۶۰
	مرجع [۲۴]	۲/۳۸۰۶	۲/۳۴۲۴	۲/۴۹۹۸
$\frac{\pi}{4}$	تحقیق حاضر	۵/۴۵۴۰	۵/۴۰۱۳	۵/۶۲۹۵
	مرجع [۲۴]	۵/۴۶۴۹	۵/۴۰۶۳	۵/۶۴۸۱
$\frac{\pi}{3}$	تحقیق حاضر	۸/۰۵۲۴	۷/۹۸۸۰	۸/۲۹۹۸
	مرجع [۲۴]	۸/۰۷۶۶	۸/۰۰۵۱	۸/۲۹۹۸

نکته: ضریب تابع توزیع توانی صفر در نظر گرفته شده است.

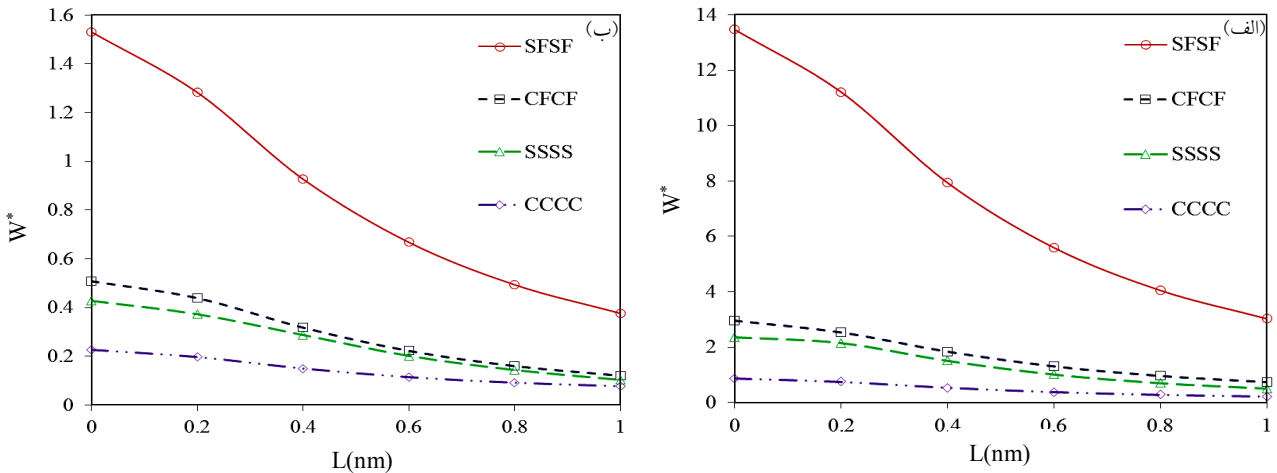
جدول ۲- مقایسه خیز بی‌بعد صفحه مستطیلی از ماده مدرج تابعی با ضریب تابع توزیع توانی متفاوت در تحقیق حاضر و مرجع [۲۶]

$\frac{h}{a}$	پارامتر مقیاس طول	n=۰		n=۱	
		تحقیق حاضر	مرجع [۲۶]	تحقیق حاضر	مرجع [۲۶]
۰/۱	۰	۰/۴۳۸۵	۰/۴۴۱۵	۰/۸۶۰۱	۱/۰۲۰۵
۰/۲	۰/۲	۰/۳۷۷۵	۰/۳۸۴۴	۰/۷۳۲۵	۰/۸۵۶۷
۰/۴	۰/۴	۰/۲۷۳۳	۰/۲۷۷۵	۰/۵۱۲۵	۰/۵۷۹۸
۰/۶	۰/۶	۰/۱۸۸۵	۰/۱۹۰۶	۰/۳۴۶۱	۰/۳۷۹۰
۰/۸	۰/۸	۰/۱۳۲۵	۰/۱۳۳۵	۰/۲۴۰۹	۰/۲۵۷۳
۱	۱	۰/۰۹۶۷	۰/۰۹۷۲	۰/۱۷۵۱	۰/۱۸۳۸
۰/۲	۰	۰/۵۰۹۸	۰/۵۱۴۷	۱/۰۰۱۵	۱/۱۵۳۶
۰/۲	۰/۲	۰/۴۳۸۹	۰/۴۴۷۹	۰/۸۴۶۴	۰/۹۶۸۵
۰/۴	۰/۴	۰/۳۱۷۹	۰/۳۲۵۰	۰/۵۹۰۹	۰/۶۵۹۹
۰/۶	۰/۶	۰/۲۲۲۶	۰/۲۲۶۸	۰/۴۰۷۳	۰/۴۳۹۵
۰/۸	۰/۸	۰/۱۶۰۴	۰/۱۶۳۱	۰/۲۹۰۰	۰/۳۰۷۳
۱	۱	۰/۱۲۰۹	۰/۱۲۳۰	۰/۲۱۷۸	۰/۲۲۷۹

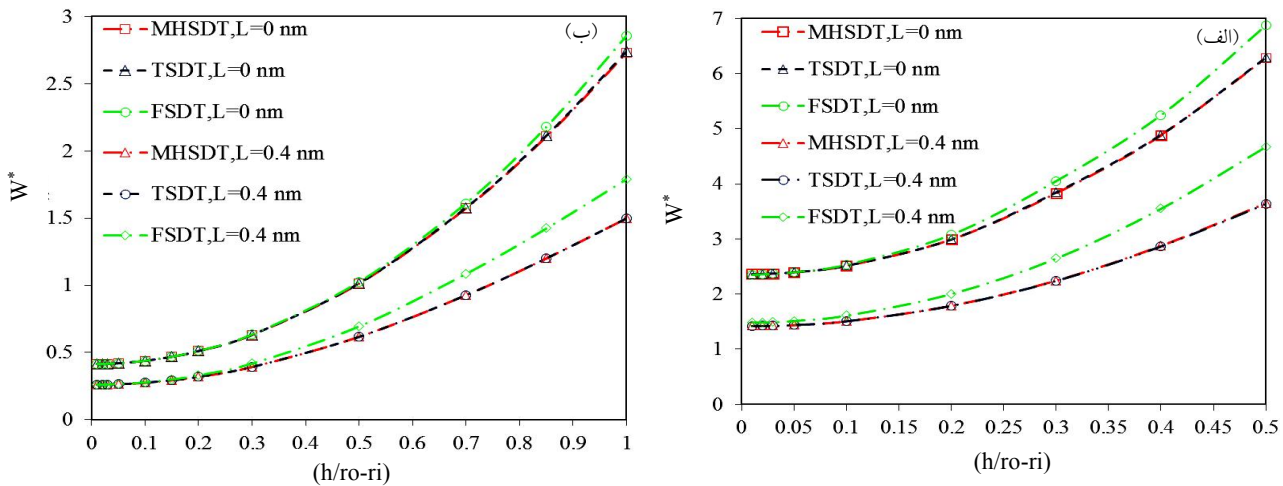
مقیاس طول بر روی خیز بی‌بعد نیز افزایش می‌یابد.

از دیگر مزایای تئوری تغییر شکل مرتبه بالای برشی اصلاح شده این است که این تئوری یک حالت عمومی داشته به طوری که با استفاده از تابع جابه‌جایی آن می‌توان به توابع جابه‌جایی تئوری‌های مرتبه اول و سوم برشی دست یافت [۱۸]. از این رو، چنانچه در تئوری مرتبه بالای برشی اصلاح شده مقدار تابع توزیع نیروی برشی در راستای ضخامت صفر در نظر گرفته شود ( $f(z) = 0$ )، میدان جابه‌جایی به دست آمده مربوط به تئوری مرتبه اول برشی و اگر  $f(z) = z^3$  باشد، مربوط به

تئوری مرتبه سوم برشی خواهد بود [۱۸]. در شکل (۷) تغییرات خیز بی‌بعد صفحه برای نسبت‌های مختلف ضخامت به اختلاف شعاع و تئوری‌های مختلف (مرتبه اول، سوم و مرتبه بالای برشی اصلاح شده) برای صفحات قطاعی و مستطیلی بررسی شده است. با توجه به نمودارها همان‌گونه که انتظار می‌رود، در ضخامت‌های کم نتایج تئوری‌های مرتبه اول و سوم و مرتبه بالای برشی اصلاح شده تقریباً بر هم منطبق بوده ولی با افزایش ضخامت، نتایج تئوری‌ها از هم فاصله می‌گیرند، که این موضوع اهمیت استفاده از تئوری‌های مرتبه بالای برشی را با



شکل ۶ - تغییرات حداکثر خیز بی بعد بر حسب تغییرات پارامتر مقیاس طول برای مقادیر مختلف شرایط مرزی در الف) صفحه قطاعی و ب) صفحه مستطیلی (رنگی در نسخه الکترونیکی)



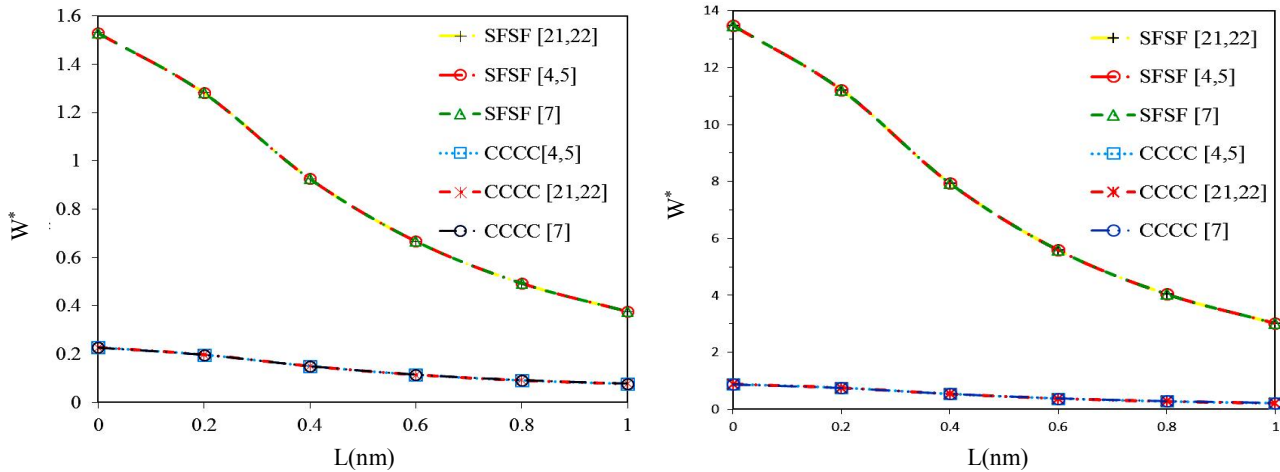
شکل ۷ - تغییرات حداکثر خیز بی بعد برای ضخامت و تئوری‌های مختلف (مرتبه اول، سوم و مرتبه بالای اصلاح شده) در الف) صفحه قطاعی و ب) صفحه مستطیلی (رنگی در نسخه الکترونیکی)

نسبت به پارامتر مقیاس طول با توابع متفاوت توزیع نیروی برشی در راستای ضخامت  $(f(z))$  [۴، ۵، ۷، ۲۰ و ۲۲] ترسیم شده است. مشتق اول توابع فوق در بالا و پایین صفحه  $(\pm \frac{h}{p})$  صفر شده و بدین معنی است که شرط مرزی تنش برشی در  $(\pm \frac{h}{p})$  ارضا می‌شود. همچنین با انتخاب توابع مختلف، ملاحظه می‌شود تفاوت چندانی در نتایج دیده نمی‌شود.

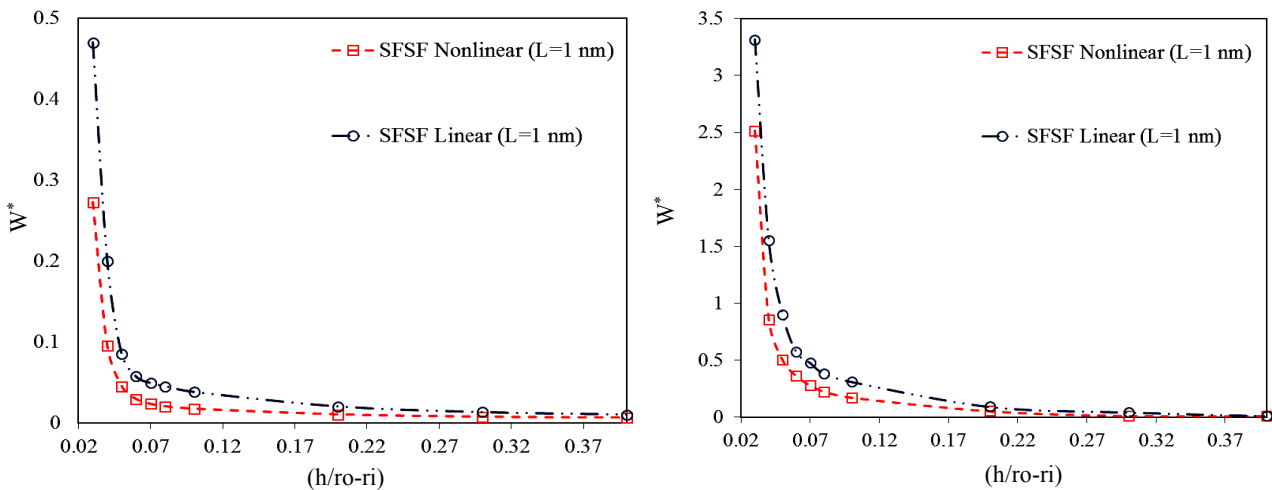
نمودار تغییرات خیز بی بعد صفحات قطاعی و مستطیلی بر حسب تغییرات نسبت ضخامت به اختلاف شعاع قطاع و طول

افزایش ضخامت نشان می‌دهد. همچنین تئوری مرتبه اول برشی برای صفحات نسبتاً ضخیم<sup>۱۸</sup> استفاده شده و تا محدوده‌ای خاص از نسبت ضخامت به شعاع قطاع و ضخامت به طول مستطیل نتایج بر هم منطبق بوده و زمانی که تئوری دقیق‌تر می‌شود، پاسخ‌ها با سایر تئوری‌ها دارای اختلاف شده و از یک حدی به بعد پاسخ‌های تئوری مرتبه اول برشی دارای خطا خواهند شد.

در شکل (۸) نمودار تغییرات حداکثر خیز بی بعد صفحه



شکل ۸ - تغییرات حداکثر خیز بی بعد بر حسب تغییرات پارامتر مقیاس طول با توابع متفاوت توزیع نیروی برشی (۴، ۵، ۷، ۲۱، ۲۲) برای مقادیر متفاوت شرایط مرزی در الف) صفحه قطاعی و ب) صفحه مستطیلی (رنگی در نسخه الکترونیکی)



شکل ۹ - تغییرات حداکثر خیز بی بعد صفحه قطاعی بر حسب تغییرات نسبت ضخامت به اختلاف شعاع در حالت خطی و غیرخطی در الف) صفحه قطاعی و ب) صفحه مستطیلی (رنگی در نسخه الکترونیکی)

گرفت از حدود نسبت  $h/r_0 - r_i \geq 0/2$  نتایج تحلیل خطی و غیرخطی تقریباً با یکدیگر برابرند.

### ۵- بحث و نتیجه گیری

در تحقیق ارائه شده، معادلات تعادل و شرایط مرزی حاکم بر صفحات قطاعی و مستطیلی ساخته شده از مواد مدرج تابعی بر مبنای تئوری تغییر شکل مرتبه بالای برشی اصلاح شده و تنش کوپل اصلاح شده به روش اصل حداقل انرژی پتانسیل با در نظر

مستطیل در حالت خطی و غیرخطی در شکل (۹ الف و ب) نشان داده شده است. با افزایش نسبت ضخامت به اختلاف شعاع و همچنین نسبت ضخامت به طول مستطیل، از یک محدوده خاص به بعد پاسخ‌های حالت خطی و غیرخطی به هم نزدیک می‌شوند. همچنین با افزایش ضخامت، خیز بی بعد کاهش یافته و تأثیر عبارات‌های غیرخطی کرنش بر نتایج کاهش می‌یابد. لذا با کاهش خیز، اختلاف تحلیل خطی و غیرخطی کم می‌شود. لازم به ذکر است که با توجه به شکل می‌توان نتیجه

— در ضرایب توزیع توانی کوچک که ماده به سمت سرامیک میل می‌کند، تغییر پارامتر مقیاس طول تأثیر چندانی بر نتایج ندارد. در حالی که با افزایش ضریب تابع توزیع توانی، تأثیر تغییرات پارامتر مقیاس طول بر نتایج بیشتر می‌شود.

— با استفاده از تئوری تغییر شکل مرتبه بالای برشی اصلاح شده می‌توان شرط مرزی آزاد را برقرار کرد.

— اهمیت استفاده از تئوری‌های مرتبه بالای برشی با افزایش ضخامت بیشتر شده و نتایج تئوری‌ها از هم فاصله می‌گیرند.

— با افزایش در ضخامت نانوصفحه، خیز بی‌بعد کاهش یافته و تأثیر عبارت‌های غیرخطی کرنش بر نتایج کاهش می‌یابد. لذا با کاهش خیز، اختلاف تحلیل خطی و غیرخطی کم می‌شود.

گرفتن کرنش‌های غیرخطی و فرضیات فون کارمن استخراج و به روش عددی درون‌یابی نیمه تحلیلی حل شده است. همچنین برای بررسی دقت روش مورد استفاده، نتایج به‌دست آمده با نتایج دیگر تحقیقات مقایسه شده، که تطابق خوب نتایج با تحقیق فوق را نشان می‌دهد. با توجه به نمودارها مشاهده می‌شود:

— با افزایش پارامتر مقیاس طول، خیز بی‌بعد صفحه، با انتخاب هر نوع شرط مرزی کاهش می‌یابد.

— هر چه صفحه از نظر شرط مرزی منعطف‌تر (درجه آزادی بیشتر) باشد، تأثیر افزایش پارامتر مقیاس طول بر خیز بی‌بعد بیشتر است. کاهش خیز با تغییر شرط مرزی از تکیه‌گاه گیردار به ساده و سپس آزاد شیب بیشتری پیدا می‌کند. به بیان دیگر خیز صفحه در شرایط مرزی به ترتیب گیردار، ساده و آزاد دامنه تغییرات بیشتری را تجربه می‌کند.

## واژه‌نامه

- |   |  |                                       |
|---|--|---------------------------------------|
| 1. nanotechnology                               | 7. modified strain gradient elasticity | deformation theory                    |
| 2. functionally graded material                 | 8. modified couple stress theory       | 13. semi-analytical polynomial method |
| 3. atomistic modeling                           | 9. Eringen nonlocal elasticity theory  | 14. power law index                   |
| 4. hybridatomistic-continuum mechanics modeling | 10. material length scale parameter    | 15. simply-supported                  |
| 5. continuum mechanics modeling                 | 11. gradient of rotation vector        | 16. clamped                           |
| 6. couple stress theory                         | 12. modified higher order shear        | 17. free                              |
|   |  | 18. moderately thick                  |

## مراجع

- Hosseini, M., Hadi, A., Malekshahi, A., and Shishesaz, M., "A Review of Size-dependent Elasticity for Nanostructures", *Journal of Computational Applied Mechanics*, Vol. 49, No. 1, pp. 197-211, 2018.
- Ichikawa, K., "Functionally Graded Materials in the 21st Century, A Workshop on Trends and Forecasts", *Springer Science and Business Media Newyork*, 2001.
- Arash, B., and Wang, Q., "A Review on the Application of Non-local Elastic Modes in Modeling of Carbon Nanotubes and Graphenes", *Computational Materials Science*, Vol. 51, No. 1, pp. 303-313, 2012.
- Levinson, M., "An Accurate Simple Theory of the Statics and Dynamics of Elastic Plate", *Mechanics Research Communication*, Vol. 7, No. 6, pp. 343-350, 1980.
- Reddy, J. N., and Liu, C. F., "A Higher-order Shear Deformation Theory of Laminated Elastic shells", *International Journal of Engineering Science*, Vol. 23, No. 3, pp. 319-330, 1985.
- Soldatos, K. P., "A Transverse Shear Deformation Theory for Homogeneous Monoclinic Plates", *Acta Mechanica*, Vol. 94, No. 1, pp. 195-220, 1992.
- Reissner, E., "On Transverse Bending of Plates Including the Effect of Transverse Shear Deformation", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 11, No. 1, pp. 569-573, 1975.
- Kaczkowski, Z., "Plates—Static Calculations", Arkady, Warszawa, 1980.
- Yang, F., Chong, A. C. M., Lam, D. C. C., and Tong, P., "Couple Stress Based Strain Gradient Theory for Elasticity", *International Journal of Solid and Structures*, Vol. 39, No. 1, pp. 2731-2743, 2002.
- Toupin, R. A., "Elastic Materials with Couple Stresses", *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, Vol. 11, No. 1, pp. 385-414, 1962.
- Mindlin, R. D. and Tiersten, H. F., "Effects of Couple-stresses in Linear Elasticity", *Archive for*

- Rational Mechanics and Analysis*, Vol. 11, No. 1, pp. 415-448, 1962.
12. Mindlin, R. D., "Micro-structures in Linear Elasticity", *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, Vol. 16, No. 1, pp. 51-78, 1964.
  13. Reddy, J. N., and Jinseok, K., "A Nonlinear Modified Couple Stress-based Third-order Theory of Functionally Graded Plates", *Composite Structures*, Vol. 94, No. 1, pp. 1128-1143, 2012.
  14. Simsek, M., Kocatürk, T., and Akbas, S. D., "Static Bending of a Functionally Graded Micro-scale Timoshenko Beam Based on the Modified Couple Stress Theory", *Composite Structures*, Vol. 95, No. 1, pp. 740-747, 2013.
  15. Wang, Y. G., Hui-Lin, W., and Zhou, C. L., "Nonlinear Bending of Size-dependent Circular Micro-plates Based on the Modified Couple Stress Theory", *Archive of Applied Mechanics*, Vol. 84, No. 1, pp. 391-400, 2013.
  16. Lei, J., He, Y., Zhang, B., Liu, D., Shen, L., and Guo, S., "A Size-dependent FG Micro-plate Model Incorporating Higher-order Shear and Normal Deformation Effects Based on a Modified Couple Stress Theory", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 104, No. 1, pp. 8-23, 2015.
  17. Khorasani, V. S., and Bayat, M., "Bending Analysis of FG Plates Using a General Third-order Plate Theory with Modified Couple Stress Effect and MLPG Method", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 94, No. 1, pp. 159-171, 2018.
  18. Dastjerdi, Sh., Abbasi, M., and Yazdanparast, L., "A New Modified Higher-order Shear Deformation Theory for Nonlinear Analysis of Macro and Nano-annular Sector Plates Using the Extended Kantorovich Method in Conjunction with SAPM", *Acta Mechanica*, Vol. 228, No. 1, pp. 3381-3401, 2017.
  19. Kadoli, R., Akhtar, K., and Ganesan, N., "Static Analysis of Functionally Graded Beams Using Higher-order Shear Deformation Theory", *Applied Mathematical Modeling*, Vol. 32, No. 1, pp. 2509-2525, 2008.
  20. Dastjerdi, S., Lotfi, M., and Jabbarzadeh, M., "The Effect of Vacant Defect on Bending Analysis of Graphene Sheets Based on the Mindlin Nonlocal Elasticity Theory", *Composites Part B*, Vol. 98, No. 1, pp. 78-87, 2016.
  21. Touratier, M., "An Efficient Standard Plate Theory", *International Journal of Engineering Science*, Vol. 29, No. 8, pp. 901-916, 1991.
  22. Zenkour, A. M., "Generalized Shear Deformation Theory for Bending Analysis of Functionally Graded Plates", *Applied Mathematical Modeling*, Vol. 30, No. 1, pp. 67-84, 2006.
  23. Jomehzadeh, E., Noori, H. R., and Saidi, A. R., "The Size-dependent Vibration Analysis of Micro-plates Based on a Modified Couple Stress Theory", *Physica E*, Vol. 43, No. 1, pp. 877-883, 2011.
  24. Alinaghizadeh, F., Shariati, M., and Fish, J., "Bending Analysis of Size-dependent Functionally Graded Annular Sector Micro-plates Based on the Modified Couple Stress Theory", *Applied Mathematical Modeling*, Vol. 44, No. 1, pp. 540-556, 2017.
  25. Golkarian, A.R., Jabbarzadeh, M., and Dastjerdi, S., "A Novel Method for Numerical Analysis of 3D Nonlinear Thermo-mechanical Bending of Annular and Circular Plates with Asymmetric Boundary Conditions Using SAPM", *Journal of Solid Mechanics*, Vol. 11, No. 3, pp. 498-512, 2019.
  26. Thai, H. T., Choi, D. H., "Size-dependent Functionally Graded Kirchhoff and Mindlin Plate Models Based on a Modified Couple Stress Theory", *Composite Structures*, Vol. 95, No. 1, pp. 142-153, 2013.

$$\bar{\mathbf{E}} = \frac{1}{\nu} \left[ (\nabla \bar{\mathbf{U}}) + (\nabla \bar{\mathbf{U}})^T + (\nabla \bar{\mathbf{U}}) \cdot (\nabla \bar{\mathbf{U}})^T \right]$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\nu} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 = \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + f(z) \frac{\partial \varphi_1'}{\partial x} + \frac{1}{\nu} \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{\nu} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 = \frac{\partial v_0}{\partial y} + z \frac{\partial \psi_1}{\partial y} + f(z) \frac{\partial \psi_1'}{\partial y} + \frac{1}{\nu} \left( \frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2$$

$$\varepsilon_{zz} = 0$$

پیوست

میدان جابجایی، کرنش‌های غیرخطی فون کارمن، معادلات تعادل با استفاده از تئوری تغییرشکل مرتبه بالای برشی اصلاح شده به‌کمک تئوری تنش کوپل اصلاح شده در مختصات کارتزین به‌صورت زیر بیان می‌شوند:

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) + z\varphi_1(x, y) + f(z)\varphi_1'(x, y)$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) + z\psi_1(x, y) + f(z)\psi_1'(x, y)$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y)$$

(الف)

$$\begin{aligned} \delta u_0 &: -\frac{\partial}{\partial x}(N_x) - \frac{\partial}{\partial y}(N_{xy}) + \\ &\quad \frac{\partial^r}{\partial x \partial y}(Y_{xz}) - \frac{\partial^r}{\partial y^r}(Y_{yz}) = 0 \\ \delta v_0 &: -\frac{\partial}{\partial y}(N_y) - \frac{\partial}{\partial x}(N_{xy}) + \\ &\quad \frac{\partial^r}{\partial y \partial x}(Y_{yz}) - \frac{\partial^r}{\partial x^r}(Y_{xz}) = 0 \\ \delta w_0 &: -\frac{\partial}{\partial x}\left(N_x \frac{\partial w}{\partial x} + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial y} + Q_x\right) - \\ &\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(N_y \frac{\partial w}{\partial y} + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} + Q_y\right) + \\ &\quad \frac{\partial^r}{\partial y \partial x}(Y_x) - \frac{\partial^r}{\partial x \partial y}(Y_y) + \frac{\partial^r}{\partial y^r}(Y_{xy}) - \\ &\quad \frac{\partial^r}{\partial x^r}(Y_{xy}) + q(z) = 0 \\ \delta \varphi_1 &: -\frac{\partial}{\partial x}(M_x + Y_{xy}) - \frac{\partial}{\partial y}(M_{xy} + Y_y - Y_z) + \\ &\quad \frac{\partial^r}{\partial x \partial y}(H_{xz}) - \frac{\partial^r}{\partial y^r}(H_{yz}) + Q_x = 0 \\ \delta \varphi' &: -\frac{\partial}{\partial x}(R_x + P_{xy}) - \frac{\partial}{\partial y}(R_{xy} + P_y - P_z) + \\ &\quad \frac{\partial^r}{\partial x \partial y}(S_{xz}) - \frac{\partial^r}{\partial y^r}(S_{yz}) + R_{xz} + G_{yz} = 0 \\ \delta \psi_1 &: \frac{\partial}{\partial y}(M_y + Y_{xy}) - \frac{\partial}{\partial x}(N_{xy} - Y_x + Y_z) + \\ &\quad \frac{\partial^r}{\partial y \partial x}(H_{yz}) - \frac{\partial^r}{\partial x^r}(H_{xz}) + Q_y = 0 \\ \delta \psi' &: -\frac{\partial}{\partial y}(R_y - P_{xy}) - \frac{\partial}{\partial x}(R_{xy} - P_x + P_z) + \\ &\quad \frac{\partial^r}{\partial y \partial x}(S_{yz}) - \frac{\partial^r}{\partial x^r}(S_{xz}) + R_{yz} + G_{xz} = 0 \end{aligned}$$

simply:

$$\begin{aligned} u_0 = v_0 = w_0 = \varphi_1 = \psi' = M_x + Y_{xy} = \\ R_x + P_{xy} = Y_{xz} = H_{xz} = S_{xz} = 0 \quad x = x_1, x_0 \\ u_0 = v_0 = w_0 = \varphi_1 = \varphi' = M_y + Y_{xy} = \\ R_y + P_{xy} = Y_{yz} = H_{yz} = S_{yz} = 0 \quad y = y_1, y_0 \\ \text{clamped:} \\ u_0 = v_0 = w_0 = \varphi_1 = \varphi' = \psi_1 = \psi' = 0 \quad x = x_1, x_0 \\ u_0 = v_0 = w_0 = \varphi_1 = \varphi' = \psi_1 = \psi' = 0 \quad y = y_1, y_0 \end{aligned}$$

(د)

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} = \\ &\quad \frac{\partial u_0}{\partial y} + z \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \right) + \\ &\quad f(z) \left( \frac{\partial \varphi'}{\partial y} + \frac{\partial \psi'}{\partial x} \right) + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \varphi_1 + f'(z)\varphi' + \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \psi_1 + f'(z)\psi' + \frac{\partial w_0}{\partial y} \end{aligned}$$

(ب)

$$\begin{aligned} \chi_{xx} &= \frac{1}{r} \left( \frac{\partial^r w_0}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi_1}{\partial x} - f'(z) \frac{\partial \psi'}{\partial x} \right) \\ \chi_{yy} &= \frac{1}{r} \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + f'(z) \frac{\partial \varphi'}{\partial y} - \frac{\partial^r w_0}{\partial y \partial x} \right) \\ \chi_{zz} &= \frac{1}{r} \left( \frac{\partial \psi_1}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + f'(z) \left( \frac{\partial \psi'}{\partial x} - \frac{\partial \varphi'}{\partial y} \right) \right) \\ {}^r\chi_{xy} &= \frac{1}{r} \left( \frac{\partial^r w}{\partial y^r} - \frac{\partial^r v}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^r u}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^r w}{\partial x^r} \right) = \\ &\quad \left( \frac{\partial^r w_0}{\partial y^r} - \frac{\partial \psi_1}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{r} \left( f'(z) \left( \frac{\partial \varphi'}{\partial x} - \frac{\partial \psi'}{\partial y} \right) - \frac{\partial^r w_0}{\partial x^r} \right) \right) \\ {}^r\chi_{xz} &= \frac{1}{r} \left( \frac{\partial^r v}{\partial z^r} - \frac{\partial^r w}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^r u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^r v}{\partial x^r} \right) = \\ &\quad \left( f''(z)\psi' + \frac{\partial^r u_0}{\partial x \partial y} + z \left( \frac{\partial^r \varphi_1}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^r \psi_1}{\partial x^r} \right) - \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{r} \left( \frac{\partial^r v_0}{\partial x^r} + f(z) \left( \frac{\partial^r \varphi'}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^r \psi'}{\partial x^r} \right) \right) \right) \\ {}^r\chi_{yz} &= \frac{1}{r} \left( \frac{\partial^r u}{\partial z^r} - \frac{\partial^r w}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^r v}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^r u}{\partial y^r} \right) = \\ &\quad \left( f''(z)\varphi' + \frac{\partial^r v_0}{\partial y \partial x} + z \left( \frac{\partial^r \psi_1}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^r \varphi_1}{\partial y^r} \right) - \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{r} \left( \frac{\partial^r u_0}{\partial y^r} + f(z) \left( \frac{\partial^r \psi'}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^r \varphi'}{\partial y^r} \right) \right) \right) \end{aligned}$$

(ج)

free:

$$\begin{aligned}
 N_x &= N_{xy} + \frac{\partial}{\partial x}(Y_{xz}) - \frac{\partial}{\partial y}(Y_{yz}) = \\
 & N_x \frac{\partial w}{\partial x} + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial y} + Q_x + \frac{\partial}{\partial y}(Y_y) - \\
 & \frac{\partial}{\partial x}(Y_{xy}) = M_x + Y_{xy} = R_x + P_{xy} = \\
 & M_{xy} - Y_x - Y_z + \frac{\partial}{\partial x}(H_{xz}) \quad x = x_i, x_o \\
 -\frac{\partial}{\partial y}(H_{yz}) &= R_{xy} - P_x - P_z + \frac{\partial}{\partial x}(S_{xz}) - \\
 \frac{\partial}{\partial y}(S_{yz}) &= Y_x = Y_{xy} = Y_{xz} = H_{xz} = S_{xz} = 0 \\
 N_y &= N_{xy} - \frac{\partial}{\partial x}(Y_{xz}) + \frac{\partial}{\partial y}(Y_{yz}) = \\
 & N_y \frac{\partial w}{\partial y} + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} + Q_y - \frac{\partial}{\partial x}(Y_x) - \\
 & \frac{\partial}{\partial y}(Y_{xy}) = M_y + Y_{xy} = R_y + P_{xy} = \\
 & M_{xy} + Y_y - Y_z - \frac{\partial}{\partial x}(H_{xz}) \quad y = y_i, y_o \\
 -\frac{\partial}{\partial y}(H_{yz}) &= R_{xy} - P_y - P_z + \frac{\partial}{\partial x}(S_{xz}) - \\
 \frac{\partial}{\partial y}(S_{yz}) &= Y_y = Y_{xy} = Y_{yz} = H_{yz} = S_{yz} = 0
 \end{aligned}$$

(5)