

## تحلیل و مقایسه رفتار دینامیکی غیرخطی ورق مستطیلی ویسکوالاستیک و الاستیک تحت جریان آیرودینامیک مافوق صوت

حسن اسدی گرجی و اردشیر کرمی محمدی\*  
دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود

(دریافت مقاله: ۱۳۹۹/۴/۲۱ - دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۹/۱۰/۱۴)

**چکیده** - رفتارهای پیچیده غیرخطی مانند حرکت آشوبناک، اثرات نامطلوب و مخربی بر سیستم‌های دینامیکی دارند. در این تحقیق رفتار غیرخطی ورق ویسکوالاستیک مستطیلی با لبه‌های مفصلی، تحت اثر جریان آیرودینامیکی مافوق صوت مورد بررسی و تحلیل قرار گرفته و نتایج با ورق الاستیک غیرخطی مقایسه شده است. معادلات ورق با استفاده از تئوری ورق کلاسیک به دست آمده و از روابط کرنش-جابجایی ون-کارمن نیز به منظور ملاحظه اثرات غیرخطی هندسی استفاده شده است. مدل کلونین ویت برای توصیف خاصیت ویسکوالاستیک و "تئوری شبه پایای پیستون مرتبه اول" نیز به منظور مدل‌سازی جریان آیرودینامیکی مافوق صوت به کار گرفته شدند. معادلات حرکت ورق از روش لاگرانژ استخراج و سپس با روش رایلی-ریتز گسسته‌سازی شد. معادلات با استفاده از روش رانگ کوتای مرتبه چهار حل و برای بررسی رفتار دینامیکی ورق، مقادیر ویژه سیستم و نیز نمودارهای پاسخ زمانی، فضای فازی، نگاشت پوانکاره، طیف توانی و نمودار چندشاخگی مورد مطالعه و تحلیل قرار گرفت. نتایج نشان می‌دهد که در برخی نسبت‌های منطقی، آستانه وقوع فلاپ در ورق ویسکوالاستیک پایین‌تر از ورق الاستیک است. از سوی دیگر با افزایش پارامتر کنترلی، به جای رفتارهای پیچیده غیرخطی مانند آشوب در ورق الاستیک، در ورق ویسکوالاستیک رفتارهای ساده‌تری نظیر حرکت پریودیک رخ می‌دهد.

واژه‌های کلیدی: ورق ویسکوالاستیک مستطیلی، جریان آیرودینامیک مافوق صوت، دینامیک غیرخطی، چندشاخگی.

## Analysis and Comparison of Nonlinear Dynamic Behavior of Viscoelastic and Elastic Rectangular Plates under Supersonic Aerodynamic Flow

H. Asadigorji and A. Karami Mohammadi \*

Department of Mechanical Engineering, Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran.

**Abstract:** Complex nonlinear behaviors such as chaotic motion have devastating effects on dynamic systems. In this study, nonlinear behavior of simply supported rectangular viscoelastic plates was examined during supersonic aerodynamics and

\* : مسئول مکاتبات، پست الکترونیکی: akaramim@shahroodut.ac.ir

compared with the nonlinear elastic plate. Classical plate theory was used to obtain the plate equations, and Von-Kármán strain-displacement relations were used to consider the nonlinear geometric effects. The Kelvin Voigt model was also used to describe the viscoelastic properties and the "first-order piston theory" was used for supersonic aerodynamic flow. The equations of motion of the rectangular plate were extracted using the Lagrangian method and then, discretized by the Rayleigh-Ritz method. Solution of the equations was performed using fourth order Runge Kutta method. To investigate the dynamic behavior of the plates, the eigenvalues of the system, time history curves, phase portraits, Poincaré maps, and bifurcation diagrams were studied and analyzed. The results show that in some aspect ratios, the threshold for the occurrence of the flutter in the viscoelastic plate will be lower than that in the elastic plate. On the other hand, when the control parameter increases, complex nonlinear behavior such as chaos in the elastic plate goes simpler in the viscoelastic plate, such as periodic motion.

**Keywords:** Rectangular Viscoelastic Plate, Supersonic Aerodynamic Flow, Nonlinear Dynamics, Bifurcation Diagrams.

## فهرست علائم

جابه‌جایی عرضی	w	طول ورق، m	a
فاکتور تصحیح تراکم‌پذیری $\sqrt{Ma^2 - 1}$	$\beta$	عرض ورق، m	b
چگالی، $kg/m^3$	$\rho$	انعطاف خمشی ورق Nm	D
چگالی هوا، $kg/m^3$	$\rho_a$	مدول الاستیسیته، $N/m^2$	E
نسبت بی‌بعد جرم سیال به ساختار $\mu = \frac{\rho_a a}{\rho H}$	$\mu$	میرایی آیرودینامیک بی‌بعد $g_a = \sqrt{\frac{\mu}{Ma}}$	$g_a$
مختصه بی‌بعد مکانی x	$\zeta$	ضخامت ورق، m	H
نسبت بی‌بعد ضخامت ورق به طول آن $\delta = H/a$	$\delta$	عدد ماخ	$M_\infty$
نسبت طول به عرض ورق $\Phi = a/b$	$\Phi$	تعداد مدها در جهت x	$m_w$
مختصه بی‌بعد مکانی y	$\eta$	تعداد مدها در جهت y	$n_w$
نسبت جرمی بی‌بعد سیال به ساختار ورق $\mu = \frac{\rho_a a}{\rho_m H}$	$\mu$	فشار آیرودینامیکی، در جهت مثبت محور	$\Delta P$
اجزای کرنش $\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{zz}$	$\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{zz}$	فشار آیرودینامیک $\rho_a V_\infty^2 / 2$	q
زمان بی‌بعد $t\sqrt{D/\rho_m Ha^4}$	$\tau$	نیروی آیرودینامیک تعمیم‌یافته	Q
پارامتر تأخیر زمانی	$\tau_c$	انرژی جنبشی، J	T
فشار آیرودینامیک بی‌بعد $\lambda = \frac{\rho_\infty V_\infty^2 a^2}{\beta D}$	$\lambda$	انرژی پتانسیل، J	U
نسبت پواسن	$\nu$	سرعت جریان، m/s	$V_\infty$
		جابه‌جایی درون صفحه‌ای در طول و عرض	u, v

## ۱- مقدمه

روش گالرکین و انتگرال‌گیری عددی حل شد. او به کمک تئوری تغییر شکل‌های بزرگ ون-کارمن و تئوری‌های آیرودینامیکی مختلف به بررسی فلاتر<sup>۱</sup> ورق و نوسانات غیرخطی پرداخت. ویلیانگ و داوول [۳]، به بررسی فلاتر و سیکل حدی<sup>۲</sup> بال مستطیلی در جریان مافوق‌صوت با استفاده از تئوری ون-کارمن

ورق‌ها در بسیاری از صنایع از جمله صنعت هوا فضا کاربرد فراوان دارند. مطالعاتی بر روی رفتار ورق‌ها تحت جریان آیرودینامیک خطی توسط داوول [۱ و ۲] انجام شد. معادلات دیفرانسیل غیرخطی با مشتقات معمولی استخراج و به کمک

خدایاروف [۹]، فلاتر غیرخطی ورق‌های ویسکوالاستیک در جریان مافوق صوت را با استفاده از تئوری شبه پایای پیستون برای مدل‌سازی جریان آیرودینامیک مورد بررسی قرار داد. مرت و هیلتون [۱۰]، به روش تحلیلی به بررسی فلاتر ورق الاستیک و ویسکوالاستیک در جریان‌های مادون<sup>۴</sup> و مافوق صوت<sup>۱۵</sup> پرداختند. همگرایی سری گالرکین و تأثیر آن روی بسامد فلاتر مورد بررسی قرار گرفت. ساکسا و همکاران [۱۱]، پایداری و رفتار دینامیکی ورق‌های ویسکوالاستیک متحرک را با استفاده از تئوری ورق کلاسیک مورد بررسی قرار دادند. آنها نشان دادند که با افزایش ویسکوزیته، سرعت فلاتر نیز افزایش می‌یابد، همچنین محدوده پایداری ورق در فشارهای آیرودینامیکی نزدیک فلاتر را بررسی و تحلیل کردند. آماییلی [۱۲]، ارتعاشات غیرخطی ورق‌های مستطیلی نازک ویسکوالاستیک را تحت تحریک هارمونیک، حوالی کوچک‌ترین بسامد شدید<sup>۱۶</sup> مورد بررسی قرار داد و با بهره بردن از مدل کلونین-ویت در مدل‌سازی خاصیت ویسکوالاستیک، به این نتیجه رسید که سیستم سخت شونده بوده و ماکزیمم پاسخ غیرخطی سیستم کاهش می‌یابد. یانگ و همکاران [۱۳] به بررسی فلاتر ورق کامپوزیت با لایه میانی ویسکوز در جریان مافوق صوت پرداختند. آنها پی بردند که در اثر میرایی ویسکوالاستیک پدیده فلاتر به تأخیر می‌افتد. فیلهو و همکاران [۱۴]، کاهش اثرات بی‌ثبات کننده جریان آیرودینامیک مافوق صوت را بر ورق مستطیلی با استفاده از لایه‌های ویسکوالاستیک بررسی و نیز اثرات دما را مورد توجه قرار دادند. اسمانوف [۱۵] به بررسی ناپایداری ورق ویسکوالاستیک در جریان مافوق صوت پرداخت. وی رفتار ورق الاستیک و ورق ویسکوالاستیک را مقایسه و به این نتیجه رسید که در ورق ویسکوالاستیک در حالت گذرا و پایا سرعت بحرانی فلاتر بهبود می‌یابد.

ونگ و همکاران [۱۶]، به مطالعه رفتار فلاتر ورق ویسکوالاستیک تحت جریان آیرودینامیک که از زیر و روی ورق جریان داشت پرداختند. آنها با استفاده از تئوری جابه‌جایی بزرگ ون کارمن و تئوری آیرودینامیک پیستون و همچنین تئوری ویسکوالاستیک کلونین معادلات حرکت را به دست آورده و با استفاده از روش گالرکین معادلات با مشتقات جزئی با استفاده از روش

و تئوری جریان مافوق صوت شبه پایا و نیز به‌کارگیری روش رایلی-ریتز برای حل نوسانات غیرخطی فلاتر صفحه پرداختند. ژیه و همکاران [۴]، سیر تکاملی به سمت حرکت آشوبناک<sup>۳</sup> را برای ورق یک سرگردار<sup>۴</sup> در جریان مافوق صوت مورد بررسی قرار دادند. تحقیقات قبلی مربوط به شرایط مرزی با لبه‌های مفصلی<sup>۵</sup> بوده و یا تنها سیکل حدی مورد بررسی قرار گرفته بود، اما آنها آشوب در ورق یک سرگردار (ورق مستطیلی یک لبه گیردار و سه لبه آزاد) را مورد مطالعه قرار دادند. ایشان با استفاده از نمودارهای جابه‌جایی عرضی برحسب زمان<sup>۶</sup>، فضای فازی<sup>۷</sup>، نگاشت پوانکاره<sup>۸</sup> و طیف توانی<sup>۹</sup> به شناسایی حرکات پرپودیک<sup>۱۰</sup> و آشوبناک در ورق الاستیک پرداختند. مدل ویسکوالاستیک کلونین-ویت توسط ژیا و لوکازویچ [۵ و ۶] در سال ۱۹۹۴ و برای مدل کردن ارتعاشات غیرخطی اجباری و آزاد ورق مستطیلی ساندویچی با تکیه‌گاه‌های لولایی قابل حرکت استفاده شد. آنها دو لایه خارجی الاستیک را با هسته میانی ویسکوالاستیک در نظر گرفتند و حل عددی را با انتگرال‌گیری مستقیم از معادلات حرکت به روش رانگ-کوتا<sup>۱۱</sup> به دست آوردند. کماتش دینامیکی و رفتار آشوبناک ورق‌های ویسکوالاستیک با روابط کرنش-جابه‌جایی غیرخطی توسط سان و ژنگ [۷] مورد مطالعه قرار گرفت. ورق به صورت ویسکوالاستیک خطی با یک معادله دینامیکی انتگرالی-دیفرانسیلی یک درجه آزادی مدل شد و با استفاده از رابطه لیاپانوف تغییر رفتار ورق توضیح داده شد. پورتاک‌دوست و فاضل‌زاده [۸]، به آنالیز فلاتر ورق ویسکوالاستیک در جریان مافوق صوت پرداختند. ایشان معادلات حاکم بر حرکت را توسط تئوری تغییر شکل بزرگ ون کارمن به دست آوردند و از مدل کلونین<sup>۱۲</sup> برای مدل‌سازی ورق ویسکوالاستیک و همچنین تئوری پیستون<sup>۱۳</sup> برای مدل‌سازی جریان آیرودینامیک مافوق صوت استفاده کردند. معادلات با مشتقات جزئی با استفاده از روش گالرکین به معادلات با مشتقات معمولی تبدیل و سپس به روش رانگ کوتا مرتبه چهار حل شد. نتایج حاکی از تأثیر مهم میرایی ساختاری در منطقه آشوبناک است.

مستطیلی از روش لاگرانژ<sup>۳۳</sup> استخراج، و سپس با روش رایلی- ریتز<sup>۳۴</sup> گسسته‌سازی شد. حل معادلات با استفاده از روش رانگ کوتای مرتبه چهار انجام و برای بررسی رفتار دینامیکی ورق، مقادیر ویژه سیستم و نیز نمودارهای پاسخ زمانی، فضای فازی، نگاشت پوانکاره، طیف توانی و نمودار چندشاخگی مورد مطالعه و تحلیل قرار گرفت.

## ۲- مدل ریاضی

در شکل (۱) ورق مستطیلی با لبه‌های مفصلی به طول  $a$  و عرض  $b$  و ضخامت  $H$  مشاهده می‌شود که تحت جریان آیرودینامیک مافوق صوت موازی با صفحه  $xy$  قرار دارد.

### ۲-۱- انرژی جنبشی و پتانسیل

بر اساس تئوری ورق کلاسیک توزیع جابه‌جایی ورق به صورت زیر است

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \\ w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t) \end{aligned} \quad (1)$$

به طوری که  $u_0$ ،  $v_0$  و  $w_0$  جابه‌جایی صفحه میانی ورق  $u$ ،  $v$  و  $w$  جابه‌جایی عمومی ورق هستند. با توجه به روابط کرنش جابه‌جایی ون کارمن می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \\ K_x &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad K_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad K_{xy} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (2)$$

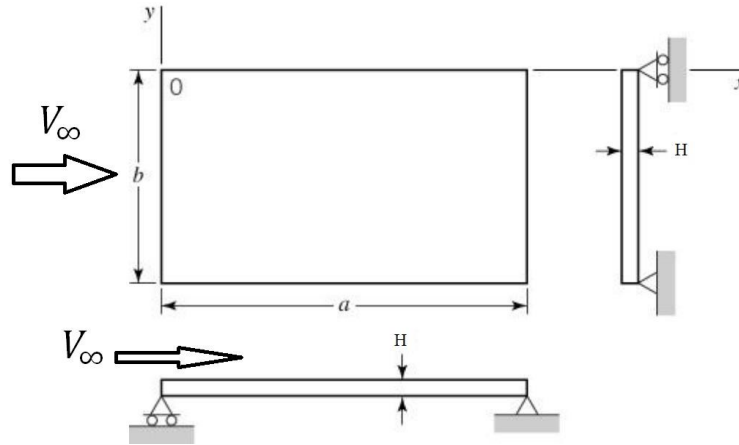
روابط تنش‌های  $\sigma_x$ ،  $\sigma_y$  و  $\tau_{xy}$  با کرنش‌ها برای مواد همگن همسانگرد (در حالت تنش صفحه‌ای،  $\sigma_z = 0$ ) با استفاده از مدل ویسکوالاستیک کلونین ویت در ادامه آمده است [۲۰].

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) + \tau_c \frac{E}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial t} + \nu \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial t} \right) \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x) + \tau_c \frac{E}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial t} + \nu \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial t} \right) \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy} + \tau_c \frac{E}{2(1+\nu)} \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial t} \end{aligned} \quad (3)$$

روش‌های عددی در مهندسی، سال ۴۰، شماره ۱، تابستان ۱۴۰۰

معادلات با مشتقات معمولی تبدیل کردند و سپس به حل آن پرداختند. نتایج نشان می‌دهد که با وجود پارامتر ویسکوز، رفتارهای نامطلوب ورق به رفتارهای ساده‌تر و با دامنه نوسانات کمتر تبدیل می‌شود و نیز افزایش دما اثر نامناسبی بر وقوع فلاتر دارد. راد و همکاران [۱۷] در کتاب خود به بررسی کنترل غیرفعال<sup>۱۷</sup> ارتعاشات با استفاده از مواد ویسکوالاستیک پرداختند و با استفاده از روش‌های مختلف، تأثیر پارامتر ویسکوز را بررسی کردند. شروف و همکاران [۱۸]، به اثر زاویه حمله<sup>۱۸</sup> بر رفتار فلاتر ورق ویسکوالاستیک پرداختند و به این نتیجه رسیدند که زاویه حمله بر نوسانات سیستم ویسکوالاستیک و فلاتر تأثیر زیادی دارد. خدایاروف و همکاران [۱۹]، به تحلیل نوسانات سازه ویسکوالاستیک نازک تحت فشار استاتیک پرداختند. ایشان برای توصیف خصوصیات ویسکوالاستیک، از تئوری انعطاف پذیری بولتزمن-ولترا<sup>۱۹</sup> استفاده کردند. آنها معادلات دیفرانسیل جزئی غیرخطی را با استفاده از روش بونوف-گالرکین<sup>۲۰</sup> به معادلات دیفرانسیل معمولی غیرخطی با ضرایب ثابت تبدیل و سپس به حل عددی معادلات پرداختند. تحقیقات انجام شده در گذشته در زمینه بررسی فلاتر و روابطی برای شناخت پدیده‌های غیرخطی پیچیده نظیر نوسانات سیکل حدی و آشوب بوده است و اطلاعات جامعی با استفاده از نمودارهایی از قبیل چندشاخگی<sup>۲۱</sup> درباره تغییر رفتار در فشارهای آیرودینامیکی<sup>۲۲</sup> مختلف و مقایسه رفتار ورق‌های الاستیک و ویسکوالاستیک ارائه نشده است.

در این تحقیق رفتار غیرخطی ورق ویسکوالاستیک مستطیلی با لبه‌های مفصلی در جریان آیرودینامیکی مافوق صوت مورد بررسی قرار گرفته و نتایج با ورق الاستیک غیرخطی مقایسه شد. برای به دست آوردن معادلات ورق از تئوری ورق کلاسیک و برای در نظر گرفتن اثر غیرخطی هندسی از روابط کرنش-جابه‌جایی ون-کارمن استفاده شد. همچنین توصیف خاصیت ویسکوالاستیک با به کارگیری مدل کلونین ویت و مدل‌سازی جریان آیرودینامیکی برای جریان مافوق صوت بر پایه "تئوری شبه پایای پیستون مرتبه اول" صورت پذیرفت. معادلات حرکت ورق ویسکوالاستیک



شکل ۱- طرح نمادین ورق تحت جریان آیرودینامیک

که در آن  $\mu = \rho_a a / \rho H$  نسبت جرمی هوا به ورق می باشد.

### ۲-۳- معادلات حاکم بر حرکت

مطابق با روش رایلی- ریتز، جابه جایی ها به صورت حاصل ضربی از مختصه های عمومی حرکت وابسته به زمان و توابع شکل مود<sup>۲۵</sup> وابسته به مکان که شرایط مرزی هندسی را برآورده کنند بیان می شوند. برای جابه جایی های درون صفحه ای<sup>۲۶</sup> و عرضی بی بعد مطابق با روش مود مفروض خواهیم داشت

$$\begin{aligned} u &= \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J a_{ij}(t) u_i(x) v_j(y) \\ v &= \sum_{r=1}^R \sum_{s=1}^S b_{rs}(t) u_r(x) v_s(y) \\ w &= \sum_{m=n=1}^M \sum_{n=1}^N q_{mn}(t) \phi_m(x) \psi_n(y) \end{aligned} \quad (8)$$

معادلات حاکم بر حرکت با استفاده از معادلات لاگرانژ به صورت رابطه (۹) استخراج می شود.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{a}_{ij}} \right) - \frac{\partial L}{\partial a_{ij}} &= 0 \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{b}_{rs}} \right) - \frac{\partial L}{\partial b_{rs}} &= 0 \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{mn}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_{mn}} + Q_{mn} &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

به طوری که  $L = T - U$  است. همچنین در رابطه (۹)  $Q_{mn}$  مربوط به کار نیروی آیرودینامیک است و مطابق رابطه (۱۰) محاسبه می شود.

که  $E$  مدول یانگ،  $\nu$  نسبت پواسن و  $\tau_c$  پارامتر تأخیر زمانی ویسکوالاستیک در مدل کلونین ویت است که برحسب ثانیه اندازه گیری می شود. کمیت  $\eta = \tau_c E$ ، پارامتر بیانگر ویسکوزیته است. انرژی جنبشی ورق کلاسیک نیز عبارت است از

$$T = \frac{1}{2} \iint \rho H \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right\} dx dy \quad (4)$$

### ۲-۲- مدل سازی فشار آیرودینامیک

فشار آیرودینامیکی که در اثر جریان هوا با سرعت بالا ایجاد می شود به صورت نیروی خارجی عمل می کند. این فشار را می توان براساس تئوری مرتبه ی اول پیستون تقریب زد که برای  $M_\infty > \sqrt{2}$  دارای اعتبار است [۲۱]، و برای جریان مافوق صوت به صورت زیر تقریب زده می شود [۲۲].

$$\Delta P = \frac{\rho q}{\beta} \left[ \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{M_\infty^2 - 2}{M_\infty^2 - 1} \frac{1}{V_\infty} \frac{\partial w}{\partial t} \right] \quad (5)$$

اگر از تقریب زیر، که برای  $M_\infty \gg 1$  قابل قبول است استفاده شود

$$\left( \frac{M_\infty^2 - 2}{M_\infty^2 - 1} \right)^2 \left( \frac{\mu}{\sqrt{M_\infty^2 - 2}} \right) \approx \frac{\mu}{M_\infty} \quad (6)$$

میرایی آیرودینامیکی بی بعد نیز به صورت زیر تقریب زده می شود [۲۳].

$$g_a = \sqrt{\frac{\mu}{M_\infty}} \lambda \quad (7)$$

$$\bar{v}_{rs} = \frac{v_{rs}}{H} \eta = \frac{y}{b}, \lambda = \frac{\rho_{\infty} V_{\infty}^2 a^2}{\beta D}, \mu = \frac{\rho_{\infty} a}{\rho H} \quad (11)$$

و پارامتر زمان بی بعد  $\tau$  به صورت زیر معرفی می شود

$$\tau = \sqrt{\frac{D}{\rho H a^4}} t \quad (12)$$

که  $D = EH^3 / 12(1 - \nu^2)$  مدول انعطاف پذیری خمشی و  $\rho$  چگالی ورق می باشد. معادلات بی بعد به صورت خواهد بود

$$Q_{mn} = \iint \Delta P \frac{\partial w}{\partial q_{mn}} dx dy \quad (10)$$

#### ۲-۴- فرم بی بعد معادلات

معادلات به دست آمده، به کمک پارامترهای بی بعد زیر به شکل بی بعد در می آید.

$$\zeta = \frac{x}{a}, \bar{w}_{mn} = \frac{w_{mn}}{H}, \bar{u}_{ij} = \frac{u_{ij}}{H},$$

$$\begin{aligned} & \overline{Mu}^{1\gamma} + 12 \frac{a^{\gamma}}{H^{\gamma}} \overline{Kuu}^{1\gamma} + \frac{a^{\gamma}}{H^{\gamma}} \overline{NLuw}^{1\gamma} + \nu \left( 12 \frac{a^{\gamma}}{H^{\gamma} b^{\gamma}} \overline{Kuv}^{1\gamma} + \frac{a^{\gamma}}{H b^{\gamma}} \overline{NLuw}^{2\gamma} \right) + \\ & (1-\nu) \left( \frac{a^{\gamma}}{H^{\gamma} b^{\gamma}} \overline{Kuv}^{3\gamma} + \frac{a^{\gamma}}{H^{\gamma} b^{\gamma}} \overline{Kuu}^{3\gamma} + \frac{a^{\gamma}}{H b^{\gamma}} \overline{NLuw}^{3\gamma} \right) + 12 \tau_c \frac{a^{\gamma}}{H^{\gamma}} \sqrt{\frac{D}{\rho H}} \left( \frac{H}{a^{\gamma}} \overline{Cuu}^{1\gamma} + \right. \\ & \left. \frac{H^{\gamma}}{a^{\gamma}} \overline{NLCuw}^{1\gamma} + \vartheta \left\{ \frac{H}{ab} \overline{Cuv}^{1\gamma} + \frac{H^{\gamma}}{ab^{\gamma}} \overline{NLCuw}^{2\gamma} \right\} + \frac{1-\vartheta}{2} \left\{ \frac{H}{ab} \overline{Cuv}^{3\gamma} + \frac{H}{b^{\gamma}} \overline{Cuu}^{3\gamma} + \frac{H^{\gamma}}{ab^{\gamma}} \overline{NLCuw}^{3\gamma} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{H^{\gamma}}{ab^{\gamma}} \overline{NLCuw}^{4\gamma} \right\} \right) = 0 \end{aligned} \quad (13-الف)$$

$$\begin{aligned} & \overline{Mv}^{1\gamma} + \left\{ 12 \frac{a^{\gamma}}{H^{\gamma} b^{\gamma}} \overline{Kvv}^{1\gamma} + \frac{a^{\gamma}}{H b^{\gamma}} \overline{NLvw}^{1\gamma} + \nu \left( 12 \frac{a^{\gamma}}{H^{\gamma} b^{\gamma}} \overline{Kvu}^{1\gamma} + \frac{a^{\gamma}}{H b^{\gamma}} \overline{NLvw}^{2\gamma} \right) + \frac{a^{\gamma}}{H b^{\gamma}} \overline{NLvw}^{3\gamma} \right\} + 12 \tau_c \frac{a^{\gamma}}{H^{\gamma}} \sqrt{\frac{D}{\rho H}} \left( \frac{H}{b^{\gamma}} \overline{Cvv}^{1\gamma} + \frac{H^{\gamma}}{b^{\gamma}} \overline{NLCvw}^{1\gamma} \right) + \vartheta \left\{ \frac{H}{ab} \overline{Cvu}^{1\gamma} + \frac{H^{\gamma}}{a^{\gamma} b^{\gamma}} \overline{NLCvw}^{2\gamma} \right\} + \\ & \frac{1-\vartheta}{2} \left\{ \frac{H}{a^{\gamma}} \overline{Cvv}^{3\gamma} + \frac{H}{ab} \overline{Cvu}^{3\gamma} + \frac{H^{\gamma}}{a^{\gamma} b^{\gamma}} \overline{NLCvw}^{3\gamma} + \frac{H^{\gamma}}{a^{\gamma} b^{\gamma}} \overline{NLCvw}^{4\gamma} \right\} = 0 \end{aligned} \quad (13-ب)$$

$$\begin{aligned} & \overline{Mww}^{1\gamma} + \overline{Kww}^{2\gamma} + \frac{a^{\gamma}}{b^{\gamma}} \overline{Kww}^{3\gamma} + \nu \left[ \frac{a^{\gamma}}{b^{\gamma}} \overline{Kww}^{3\gamma} + \frac{a^{\gamma}}{b^{\gamma}} \overline{Kww}^{4\gamma} \right] + 2(1-\nu) \frac{a^{\gamma}}{b^{\gamma}} \overline{Kww}^{5\gamma} + 12 \frac{a^{\gamma}}{H} \overline{NLwu}^{1\gamma} \\ & + \frac{a^{\gamma}}{H b^{\gamma}} \overline{NLww}^{1\gamma} + 12 \frac{a^{\gamma}}{H b^{\gamma}} \overline{NLww}^{2\gamma} + \frac{a^{\gamma}}{b^{\gamma}} \overline{NLww}^{3\gamma} + \nu \left( 12 \frac{a^{\gamma}}{b H} \overline{NLww}^{2\gamma} + 12 \frac{a^{\gamma}}{H b^{\gamma}} \overline{NLwu}^{2\gamma} \right) \\ & + \frac{a^{\gamma}}{b^{\gamma}} \overline{NLww}^{3\gamma} + \frac{a^{\gamma}}{b^{\gamma}} \overline{NLww}^{4\gamma} \left. \right] + \left[ \lambda \times \overline{Fw} + g_a \times \overline{Cw}^{\lambda} \right] + \tau_c \sqrt{\frac{D}{\rho H a^4}} \left( \overline{Cww}^{1\gamma} \right) \\ & + \frac{a^{\gamma}}{b^{\gamma}} \overline{Cww}^{2\gamma} + \vartheta \frac{a^{\gamma}}{b^{\gamma}} \overline{Cww}^{3\gamma} + \vartheta \frac{a^{\gamma}}{b^{\gamma}} \overline{Cww}^{4\gamma} + 2(1-\vartheta) \frac{a^{\gamma}}{b^{\gamma}} \overline{Cww}^{5\gamma} \left. \right) + 12 \tau_c \sqrt{\frac{D}{\rho H a^4}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \frac{a}{H} \overbrace{NLCwu}^{ap\delta\epsilon} + \frac{a}{H} \overbrace{NLCwu}^{ap\delta\delta} + \frac{r}{\gamma} \overbrace{NLCww}^{ap\delta\epsilon} \right\} + \gamma\tau_c \sqrt{\frac{D}{\rho ha}} \left\{ \frac{a}{b^r H} \overbrace{NLCwv}^{ap\delta\gamma} \right. \\
 & + \frac{a}{b^r H} \overbrace{NLCwv}^{ap\delta\lambda} + \frac{r}{\gamma} \frac{a}{b^r} \overbrace{NLCww}^{ap\delta\eta} \left. \right\} + \gamma\tau_c \sqrt{\frac{D}{\rho Ha}} \vartheta \left\{ \frac{a}{Hb^r} \overbrace{NLCwu}^{ap\delta\theta} \right. \\
 & + \frac{a}{Hb} \overbrace{NLCwv}^{ap\delta\iota} + \frac{a}{b^r} \overbrace{NLCww}^{ap\delta\kappa} \left. \right\} + \frac{1}{\gamma} \frac{a}{b^r} \overbrace{NLCww}^{ap\delta\lambda} + \gamma\tau_c \sqrt{\frac{D}{\rho ha}} \vartheta \left\{ \frac{a}{Hb} \overbrace{NLCwv}^{ap\delta\mu} \right. \\
 & + \frac{a}{Hb^r} \overbrace{NLCwu}^{ap\delta\delta} + \frac{a}{b^r} \overbrace{NLCww}^{ap\delta\epsilon} + \frac{1}{\gamma} \frac{a}{b^r} \overbrace{NLCww}^{ap\delta\gamma} \left. \right\} + \epsilon\tau_c \sqrt{\frac{D}{\rho Ha}} (1-\vartheta) \left\{ \frac{a}{bH} \overbrace{NLCwv}^{ap\delta\lambda} \right. \\
 & + \frac{a}{bH} \overbrace{NLCwv}^{ap\delta\eta} + \frac{a}{b^r H} \overbrace{NLCwu}^{ap\delta\theta} + \frac{a}{b^r H} \overbrace{NLCwu}^{ap\delta\iota} + \frac{a}{bH} \overbrace{NLCwv}^{ap\delta\kappa} + \frac{a}{bH} \overbrace{NLCwv}^{ap\delta\mu} \\
 & \left. + \frac{a}{b^r H} \overbrace{NLCwu}^{ap\delta\epsilon} + \frac{a}{b^r H} \overbrace{NLCwu}^{ap\delta\delta} + \frac{a}{b^r} \overbrace{NLCww}^{ap\delta\epsilon} + \frac{a}{b^r} \overbrace{NLCww}^{ap\delta\gamma} + \frac{a}{b^r} \overbrace{NLCww}^{ap\delta\lambda} + \frac{a}{b^r} \overbrace{NLCww}^{ap\delta\eta} \right\} = 0 \quad (پ-۱۳)
 \end{aligned}$$

$$K_u^u = \gamma \frac{a}{H^r} K_{uu12} + \epsilon(1-\nu) \frac{a}{H^r b^r} K_{uu34} \quad (۱۴-خ)$$

$$K_u^v = \gamma \nu \frac{a}{H^r b} K_{uv12} + (1-\nu) \epsilon \frac{a}{H^r b} K_{uv34} \quad (۱۴-د)$$

$$\begin{aligned}
 NL_u^w &= \epsilon \frac{a}{H} NL_{uw1} + \epsilon \nu \frac{a}{Hb^r} NL_{uw2} \\
 &+ (1-\nu) \frac{a}{Hb^r} NL_{uw3} \quad (۱۴-ز)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_u^u &= \gamma \tau_c \frac{a}{H^r} \sqrt{\frac{D}{\rho H}} \\
 &\left( \frac{H}{a^r} C_{uu12} + \frac{1-\vartheta}{\gamma} \frac{H}{b^r} C_{uu34} \right) \quad (۱۴-ح)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_u^v &= \gamma \tau_c \frac{a}{H^r} \sqrt{\frac{D}{\rho H}} \\
 &\left( \vartheta \frac{H}{ab} C_{uv12} + \frac{1-\vartheta}{\gamma} \frac{H}{ab} C_{uv34} \right) \quad (۱۴-ج)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 NLC_u^w &= \gamma \tau_c \frac{a}{H^r} \sqrt{\frac{D}{\rho H}} \\
 &\left( \frac{H^r}{a^r} NLC_{uw1} + \vartheta \left\{ \frac{H^r}{ab^r} NLC_{uw2} \right\} + \frac{1-\vartheta}{\gamma} \left\{ \frac{H^r}{ab^r} NLC_{uw3} + \frac{H^r}{ab^r} NLC_{uw4} \right\} \right) \quad (۱۴-چ)
 \end{aligned}$$

که توضیح پارامترهای مشخص شده در رابطه (۱۳) به صورت  $ap_{xx}$  و  $ap_{xy}$  در پیوست آمده است، همچنین روابط مشروح پارامترهای این معادلات در روابط (۱۴) داده شده است:

$$M_v^v = M_v \quad (۱۴-الف)$$

$$K_v^u = \gamma \nu \frac{a}{H^r b} K_{vu12} + \epsilon(1-\nu) \frac{a}{H^r b} K_{vu34} \quad (۱۴-ب)$$

$$K_v^v = \gamma \nu \frac{a}{Hb^r} K_{vv12} + \epsilon(1-\nu) \frac{a}{H^r} K_{vv34} \quad (۱۴-پ)$$

$$C_v^u = \gamma \tau_c \frac{a}{H^r} \sqrt{\frac{D}{\rho H}} \left( \vartheta \frac{H}{ab} C_{vu12} + \frac{1-\vartheta}{\gamma} \frac{H}{ab} C_{vu34} \right) \quad (۱۴-ت)$$

$$C_v^v = \gamma \tau_c \frac{a}{H^r} \sqrt{\frac{D}{\rho H}} \left( \frac{H}{b^r} C_{vv12} + \frac{1-\vartheta}{\gamma} \frac{H}{a^r} C_{vv34} \right) \quad (۱۴-ث)$$

$$\begin{aligned}
 NL_v^w &= \epsilon \frac{a}{Hb^r} NL_{vw1} + \epsilon \nu \frac{a}{Hb} NL_{vw2} \\
 &+ \epsilon(1-\nu) \frac{a}{Hb} NL_{vw3} \quad (۱۴-ج)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 NLC_v^w &= \gamma \tau_c \frac{a}{H^r} \sqrt{\frac{D}{\rho H}} \left( \frac{H^r}{b^r} NLC_{vw1} \right. \\
 &+ \vartheta \frac{H^r}{a^r b} NLC_{vw2} + \frac{1-\vartheta}{\gamma} \left[ \frac{H^r}{a^r b} \right. \\
 &\left. \left. NLC_{vw3} + \frac{H^r}{a^r b} NLC_{vw4} \right] \right) \quad (۱۴-چ)
 \end{aligned}$$

$$M_u^u = M_u \quad (۱۴-ح)$$

$$NLC_{ww}^u a = \gamma \frac{a}{H} \tau_c \sqrt{\frac{D}{\rho H a^r}} \left[ NLC_{wu}^v a + \vartheta \frac{a^r}{b^r} NLC_{wu}^r a + \frac{(1-\vartheta) a^r}{\gamma} \frac{a^r}{b^r} \{NLC_{wu}^r a + NLC_{wu}^r a\} \right] \quad (ق-۱۴)$$

$$NLC_{ww}^v q = \gamma \tau_c \sqrt{\frac{D}{\rho H a^r}} \frac{a^r}{b^r H} \left[ NLC_{wv}^v q + \vartheta \frac{b^r}{a^r} NLC_{wv}^r q + \frac{(1-\vartheta) a^r}{\gamma} \left\{ \frac{b^r}{a^r} NLC_{wv}^r q + \frac{b^r}{a^r} NLC_{wv}^r q \right\} \right] \quad (ک-۱۴)$$

$$NLC_{ww}^v b = \gamma \tau_c \sqrt{\frac{D}{\rho H a^r}} \frac{a^r}{b^r H} \left[ NLC_{wv}^v b + \vartheta \frac{b^r}{a^r} NLC_{wv}^r b + \frac{(1-\vartheta) a^r}{\gamma} \left\{ \frac{b^r}{a^r} NLC_{wv}^r b + \frac{b^r}{a^r} NLC_{wv}^r b \right\} \right] \quad (گ-۱۴)$$

$$NLC_{ww} = \gamma \tau_c \sqrt{\frac{D}{\rho H a^r}} \left[ \frac{\gamma}{\gamma} \left( NLC_{ww}^u + \frac{a^r}{b^r} NLC_{ww}^r \right) + \frac{a^r}{b^r} \left\{ \vartheta \left( NLC_{ww}^v + \frac{1}{\gamma} NLC_{ww}^r \right) + NLC_{ww}^r + \frac{1}{\gamma} NLC_{ww}^v \right\} + \frac{(1-\vartheta) a^r}{\gamma} \left\{ \frac{b^r}{a^r} NLC_{ww}^v + \gamma NLC_{ww}^u + NLC_{ww}^v + \gamma NLC_{ww}^r \right\} \right] \quad (ج-۱۴)$$

معادلات حرکت (۱۳) را می توان به صورت ماتریسی (۱۵) نوشت.

$$\begin{bmatrix} M_u^u & \cdot & \cdot \\ \cdot & M_v^v & \cdot \\ \cdot & \cdot & M_w^w \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{v} \\ \ddot{w} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_u^u & C_u^v & \cdot \\ C_v^u & C_v^v & \cdot \\ \cdot & \cdot & C_w^w + g_a \times C_{Aero} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_u^u & K_u^v & \cdot \\ K_v^u & K_v^v & \cdot \\ \cdot & \cdot & K_w^w + \lambda \times K_{Aero} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} NL_u^u + NLC_u^u \\ NL_v^v + NLC_v^v \\ NL_w^u + NL_w^v + NL_w^w + NLC_w^u q + NLC_w^v a + NLC_w^v q + NLC_w^v b + NLC_{ww} \end{Bmatrix} \quad (۱۵)$$

ماتریس سفتی و  $NL$  بخش غیرخطی معادلات است. به منظور به دست آوردن شکل مناسب معادلات برای روش عددی، رابطه (۱۶) در معکوس ماتریس جرمی ضرب شده و سپس در فرم

$$M_w^w = M_{ww}^w \quad (۱۴-س)$$

$$K_w^w = \frac{a^r}{b^r} K_{ww}^u + K_{ww}^v + v \left[ \frac{a^r}{b^r} K_{ww}^r + \frac{a^r}{b^r} K_{ww}^r \right] + \gamma (1-v) \frac{a^r}{b^r} K_{ww}^v \quad (۱۴-ش)$$

$$K_{Aero} = F_w \quad (۱۴-ص)$$

$$C_w^w = \tau_c \sqrt{\frac{D}{\rho H}} \left( C_{ww}^u + \frac{a^r}{b^r} C_{ww}^v + \vartheta \frac{a^r}{b^r} C_{ww}^r + \vartheta \frac{a^r}{b^r} C_{ww}^r + \gamma (1-\vartheta) \frac{a^r}{b^r} C_{ww}^v \right) \quad (۱۴-ض)$$

$$C_{Aero} = C_w \quad (۱۴-ط)$$

$$NL_w^u = \gamma \frac{a}{H} NL_{wu}^u + \gamma v \frac{a^r}{H b^r} NL_{wu}^v \quad (۱۴-ظ)$$

$$NL_w^v = \gamma \frac{a^r}{H b^r} NL_{wv}^u + \gamma v \frac{a^r}{b H} NL_{wv}^v \quad (۱۴-ع)$$

$$NL_w^w = \epsilon NL_{ww}^u + \epsilon \frac{a^r}{b^r} NL_{ww}^v + \epsilon v \frac{a^r}{b^r} (NL_{ww}^r + NL_{ww}^r) \quad (۱۴-غ)$$

$$NLC_{ww}^u q = \gamma \frac{a}{H} \tau_c \sqrt{\frac{D}{\rho H a^r}} \left[ NLC_{wu}^v q + \vartheta \frac{a^r}{b^r} NLC_{wu}^r q + \frac{(1-\vartheta) a^r}{\gamma} \frac{a^r}{b^r} \{NLC_{wu}^r q + NLC_{wu}^r q\} \right] \quad (۱۴-ف)$$

و یا به صورت خلاصه می توان نوشت:

$$M\ddot{q} + C\dot{q} + Kq = NL \quad (۱۶)$$

$M$  ماتریس جرمی قطری،  $C$  ماتریس میرایی ویسکوز،  $K$



جدول ۱- مشخصه‌های هندسی و مکانیکی ورق

مشخصه‌های هندسی	مشخصه‌های مکانیکی
$\varphi = a/b$ , ۰/۵, ۱, ۲, ۴	مدول کششی $E$ , (GPa), ۶۸۳
$\delta = H/a$ , ۰/۰۵	چگالی $\rho$ , ( $\text{kg}/\text{m}^3$ ) ۲۶۸۹
	نسبت پواسن, $\nu$ ۰/۳۳

$$v_s(y) = C_s \sin\left(\frac{s\pi y}{l}\right), \quad s = 1, 2, \dots \quad (18)$$

$$\psi_n(y) = C_n \sin\left(\frac{n\pi y}{l}\right), \quad n = 1, 2, \dots$$

### ۳- شبیه‌سازی و نتایج

مشخصه‌های هندسی و مکانیکی ورق‌های ویسکوالاستیک و الاستیک، به‌منظور سهولت مقایسه نتایج، تا حد ممکن یکسان در نظر گرفته شده و در جدول (۱) ارائه شده‌اند. ابتدا موضوع همگرایی حل با انتخاب تعداد مودهای در نظر گرفته شده در جهت جریان و عمود بر جهت جریان بررسی و تعداد مودهای لازم در هر جهت تعیین و نتایج قابل قبول به‌دست آمد. سپس صحت سنجی نتایج با توجه به دامنه نوسانات سیکل حدی مربوط به فشارهای آیرودینامیکی انجام شد. با توجه به شدت بیشتر نوسانات سیکل حدی در موقعیت بی‌بعد  $\zeta = 0/75$  و  $\eta = 0/5$ ، نمودارهای مربوط به حرکت این موقعیت رسم شده‌اند.

#### ۳-۱- مطالعه همگرایی

در شکل (۲)، دامنه نوسانات عرضی ورق برحسب فشار آیرودینامیک بی‌بعد رسم شده است. همان‌طور که در شکل (۲- الف و ب) مشاهده می‌شود، با افزایش تعداد شکل مود در راستای جریان به بیش از هشت مود و در راستای عمود بر جهت جریان به بیش از دو مود تغییرات محسوسی رخ نمی‌دهد. لذا، هشت شکل مود در راستای جریان و دو شکل مود عمود بر جهت جریان برای به‌دست آوردن پاسخ‌ها در نظر گرفته شده است. همچنین در جدول (۲)، فشار آیرودینامیکی بحرانی که

فضای حالت به‌صورت رابطه (۱۷) نوشته می‌شود.

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{y} \quad (17)$$

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{M}^{-1}[-\mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{K}\mathbf{q} + \mathbf{N}\mathbf{L}]$$

که  $\mathbf{y}$  بردار سرعت است. معادلات حالت به‌دست آمده با استفاده از روش رانگ کوتای مرتبه چهار حل می‌شود.

### ۲-۵- توابع مفروض مورد نیاز منطبق با شرایط مرزی هندسی ورق

یافتن توابعی که بتوانند همه شرایط مرزی هندسی و طبیعی ورق با قابلیت تغییرشکل‌های بزرگ را ارضا نمایند مشکل است. از این رو، مطابق با روش مود مفروض از توابعی استفاده شده که فقط شرایط مرزی هندسی را ارضا کنند.

برای تعیین توابع مجاز مورد نیاز برای توصیف جابه‌جایی‌های درون‌صفحه‌ای ورق، می‌توان از توابع شکل مود ارتعاشات طولی میله، و برای توصیف حرکت عرضی ورق نیز از شکل مودهای تیر استفاده کرد [۲۴]. با فرض این که در مقابل ارتعاشات جانبی لبه‌ها از نوع مفصلی بوده، و در مقابل ارتعاشات طولی هر چهار لبه ثابت باشند، یعنی

$$u(0, y) = u(l, y) = u(x, 0) = u(x, l) \\ = v(0, y) = v(l, y) = v(x, 0) \\ = v(x, l) = 0$$

از شکل مودهای رابطه (۱۸) استفاده می‌شود.

$$u_i(x) = C_i \sin\left(\frac{i\pi x}{l}\right), \quad i = 1, 2, \dots$$

$$u_r(x) = C_r \sin\left(\frac{r\pi x}{l}\right), \quad r = 1, 2, \dots$$

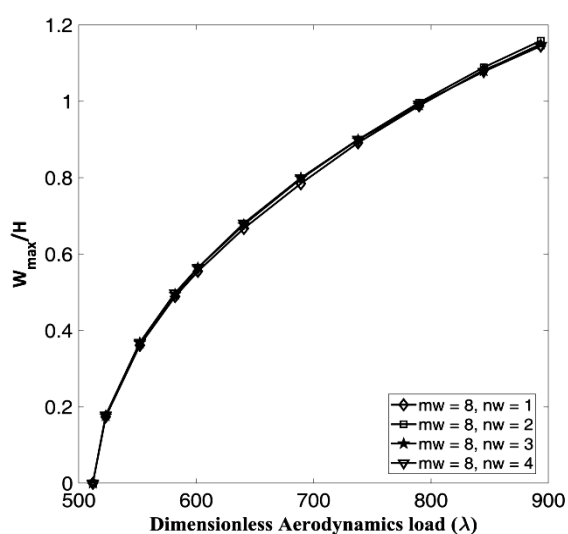
$$\phi_m(x) = C_m \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right), \quad m = 1, 2, \dots$$

$$v_j(y) = C_j \sin\left(\frac{j\pi y}{l}\right), \quad j = 1, 2, \dots$$

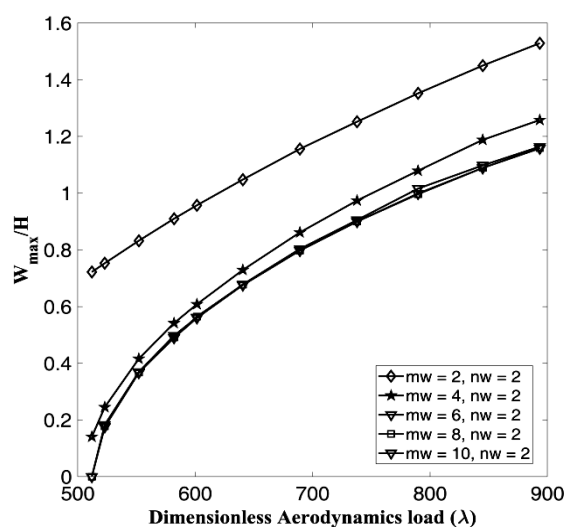
روش‌های عددی در مهندسی، سال ۴۰، شماره ۱، تابستان ۱۴۰۰

جدول ۲- وقوع فلاتر در ورق مربعی با لبه‌های مفصلی ایزوتروپیک در  $\delta = 0/01$  و  $\nu = 0/3$

روش	$\bar{\omega} = \omega a^2 \sqrt{\rho H / D}$ (فرکانس طبیعی بی‌بعد ورق)
$mw = 4; nw = 2$	۵۰۴/۲
$mw = 6; nw = 2$	۵۱۰/۶
مقاله حاضر $mw = 8; nw = 2$	۵۱۲/۲
$mw = 8; nw = 4$	۵۱۲/۲
$mw = 8; nw = 6$	۵۱۲/۳
ولی‌زاده و همکاران [۲۵]	۵۱۲
گروور و همکاران [۲۶]	۵۱۱/۱۱



(ب)



(الف)

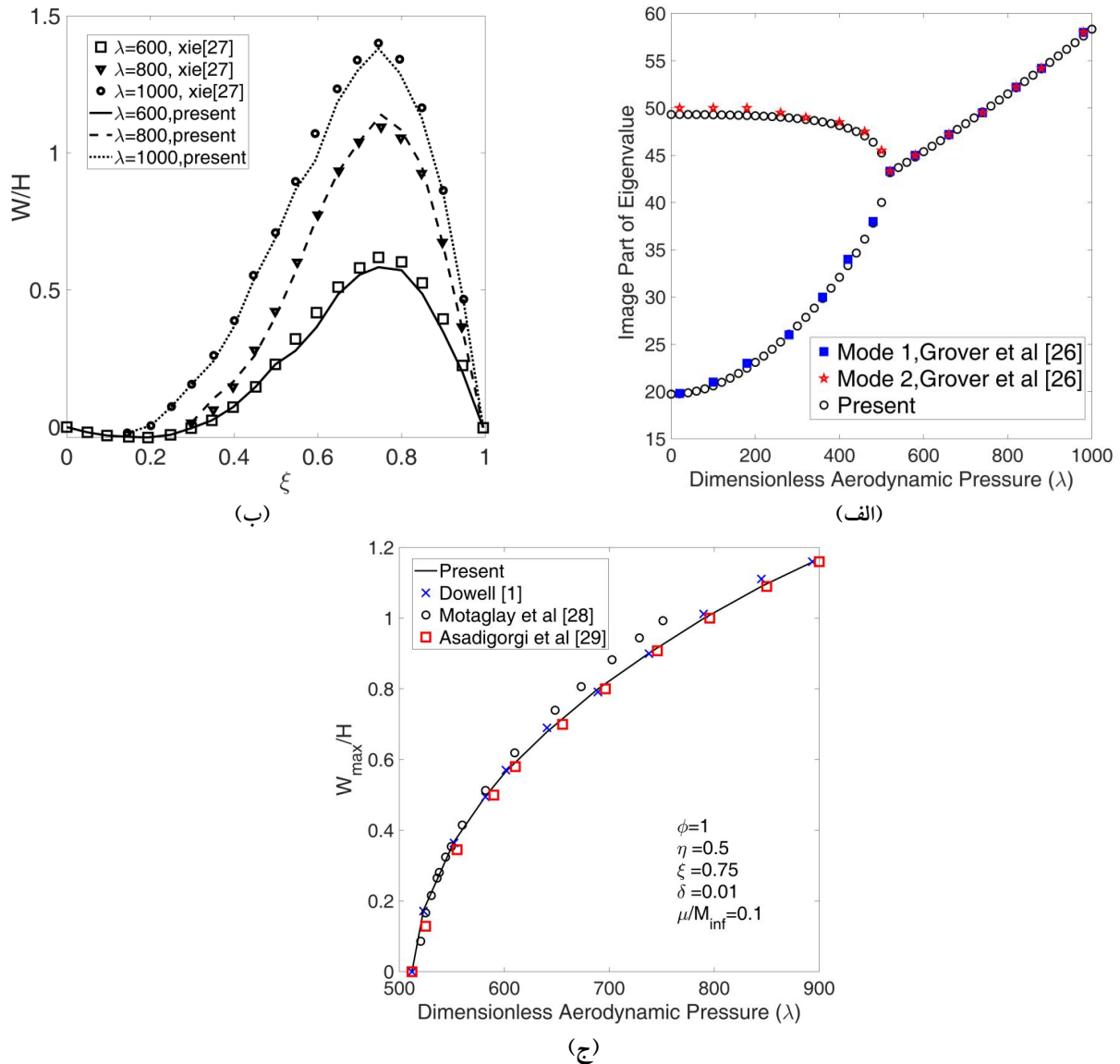
شکل ۲- همگرایی حل برای ورق با لبه‌های مفصلی ( $\delta = 0/01$  و  $\nu = 1$ ) (الف) با توجه به تعداد شکل مود در جهت جریان و (ب) با توجه به تعداد شکل مود عمود بر جهت جریان

موهومی مقادیر ویژه، برحسب فشار آیرودینامیک بی‌بعد رسم شده و با نتایج مقاله گروور و همکاران [۲۶] مقایسه شده است. نتایج در توافق کامل با مرجع [۲۶] است. در شکل (۳-ب)، دامنه نوسانات سیکل حدی ورق در جهت جریان برای سه فشار آیرودینامیکی بی‌بعد  $\lambda = 600$ ،  $\lambda = 800$  و  $\lambda = 1000$  رسم شده و با نتایج مقاله ژیه و همکاران [۲۷] مقایسه شده است. مشاهده می‌شود که دامنه نوسانات سیکل حدی در موقعیت بی‌بعد  $0/75$  در راستای جریان بیشترین مقدار خود را دارد. نتایج در توافق کامل با مرجع [۲۷] است. همچنین در

فلاتر در آن رخ می‌دهد به‌دست آمده و با نتایج مراجع [۲۵] و [۲۶] مقایسه شده است که توافق مناسبی را نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود که با هشت مود در جهت جریان و دو مود عمود بر جهت جریان، همگرایی مناسبی حاصل خواهد شد. البته انتخاب تعداد شکل مودهای بیشتر، دقت نتایج را افزایش خواهد داد اما در مقابل زمان اجرای برنامه نیز طولانی‌تر می‌شود.

### ۳-۲- صحت‌سنجی

به‌منظور صحت‌سنجی حل و نتایج، در شکل (۳-الف)، قسمت



شکل ۳- الف) قسمت موهومی مقادیر ویژه برحسب فشار آیرودینامیکی بی بعد، ب) دامنه نوسانات سیکل حدی برحسب موقعیت بی بعد در راستای جریان برای سه فشار آیرودینامیک بی بعد  $\lambda = 600$ ،  $\lambda = 800$  و  $\lambda = 1000$ ، ج) دامنه نوسانات سیکل حدی برحسب تغییرات فشار آیرودینامیک بی بعد برای ورق با لبه های مفصلی مربعی  $\mu/M_{\infty} = 0.1$  و  $\delta = 0.01$  (رنگی در نسخه الکترونیکی)

### ۳-۳ رفتار دینامیکی

در این بخش نمودارهای رفتار دینامیکی ورق الاستیک و ویسکوالاستیک برای چهار نسبت منظر  $\varphi = 1$ ،  $\varphi = 0.5$ ،  $\varphi = 2$  و  $\varphi = 4$  به دست آمده و با یکدیگر مقایسه شده اند. قابل ذکر است که نمودار چندشاخگی برحسب پارامتر کنترلی  $\lambda$

شکل (۳-ج)، دامنه نوسانات سیکل حدی برحسب فشار آیرودینامیک بی بعد برای نسبت منظری یک رسم شده و با نتایج داول [۱] و عبدل موتاگلای و همکاران [۲۵] و اسدی گرجی و همکاران [۲۹] مقایسه شد، که توافق خوبی بین نتایج قابل مشاهده است.

رفتار ورق الاستیک دارد اما اگر پارامتر ویسکوز برابر با  $\tau_c = 0/001$  باشد دامنه نوسانات عرضی ورق ویسکوالاستیک نسبت به ورق الاستیک بزرگتر خواهد بود شکل (۴-د).

در بازه  $1110 < \lambda < 1180$  رفتار ورق الاستیک از پریودیک به رفتارهای پیچیده غیرخطی تغییر می‌کند، در حالی که ورق ویسکوالاستیک همچنان از نوع پریودیک است. به‌عنوان نمونه، در  $\lambda = 1110$  نمودارهای فضای فازی و مقطع پوانکاره برای ورق الاستیک و ورق ویسکوالاستیک رسم شده و مشاهده می‌شود که رفتار ورق الاستیک از نوع پریود ۴ و ورق ویسکوالاستیک از نوع پریود ۱ است.

جابه‌جایی عرضی ورق الاستیک در بازه‌های  $1210 < \lambda < 1485$  و  $1290 < \lambda < 1485$ ، پنجره‌ای را نشان می‌دهد که در آن رفتار از نوع هارمونیک ساده است، اما در بازه  $1215 < \lambda < 1285$  رفتار ورق به رفتارهای پیچیده‌تر تغییر می‌یابد. به‌طور مثال در  $\lambda = 1275$  همان‌طور که در نمودار فضای فازی و مقطع پوانکاره مشاهده می‌شود، با در نظر گرفتن پارامتر ویسکوز  $\tau_c = 0/000001$  نوع رفتار ورق ویسکوالاستیک نسبت به الاستیک تغییر نمی‌کند اما دامنه نوسانات کاهش می‌یابد شکل (۴-الف). همچنین مشاهده می‌شود با افزایش پارامتر ویسکوز، رفتار ورق ویسکوالاستیک از شبه‌پریودیک به پریود ۲ شکل (۴-ب) و پریود ۱ شکل (۴-ج و د) تغییر می‌یابد.

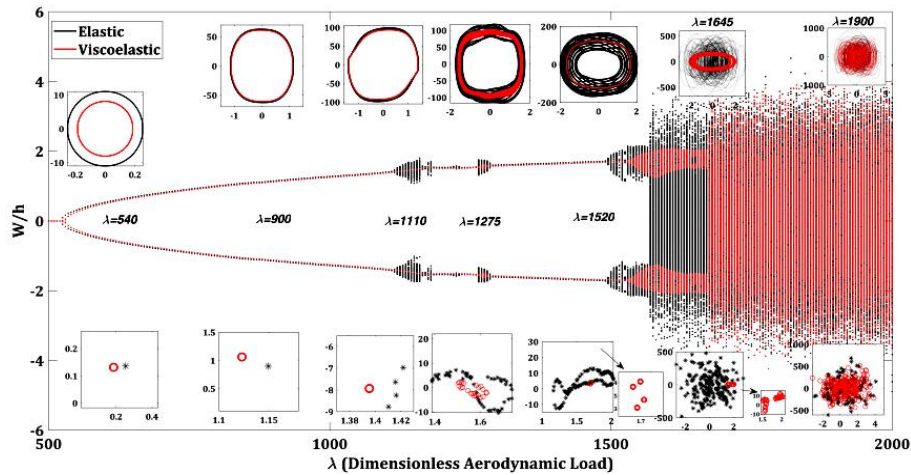
برای  $\lambda > 1490$  رفتار ورق الاستیک تغییر کرده و به رفتار آشوبناک نزدیک می‌شود. با در نظر گرفتن نمودار فضای و مقطع پوانکاره مشاهده می‌شود که رفتار ورق الاستیک به‌طور مثال در  $\lambda = 1520$ ، شبه‌پریودیک، و در  $\lambda = 1645$  و  $\lambda = 1900$  آشوبناک خواهد بود. اما رفتار ورق ویسکوالاستیک روند دیگری دارد، به‌طوری که در  $\lambda = 1520$ ، با  $\tau_c = 0/000001$  شکل (۴-الف) پریودیک با پریود ۴، و با  $\tau_c = 0/000001$  شکل (۴-ب) و  $\tau_c = 0/000001$  شکل (۴-ج) و  $\tau_c = 0/001$  شکل (۴-د) پریود ۱ است، در  $\lambda = 1645$  شکل (۴-الف تا ج) شبه‌پریودیک و شکل (۴-د) پریود ۱، و در

رسم شده و در نمودارها رنگ قرمز مربوط به ورق ویسکوالاستیک و رنگ سیاه مربوط به ورق الاستیک است. در تمامی نمودارها با افزایش تدریجی فشار آیرودینامیک بی‌بعد به‌عنوان پارامتر کنترلی، ابتدا فلاتر رخ می‌دهد سپس با افزایش پارامتر کنترلی، دامنه نوسانات زیاد شده و رفتار سیستم به حرکت با پریودهای بالاتر یا شبه‌پریودیک و بعد از آن به حرکت آشوبناک تغییر می‌یابد.

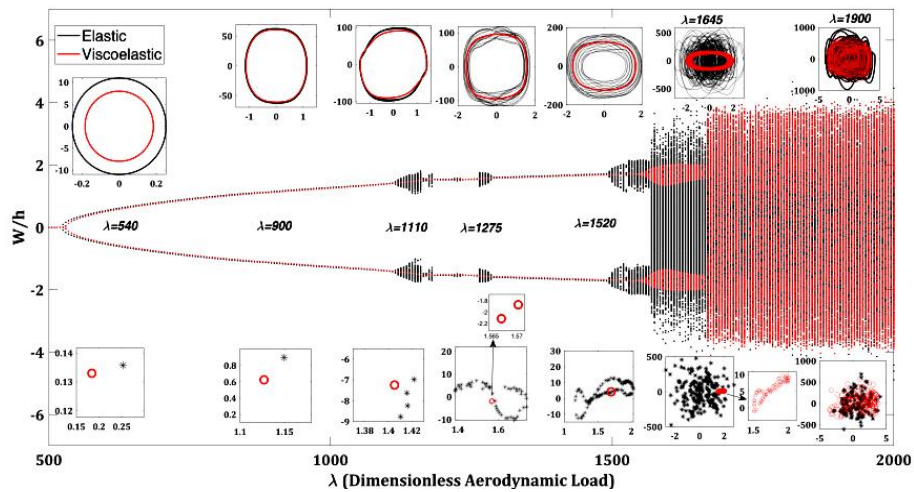
### ۳-۳-۱- نسبت منظر $\varphi = 1$

در شکل (۴)، نمودارهای چندشاخگی، برای فشار آیرودینامیکی بی‌بعد از  $\lambda = 500$  تا  $\lambda = 2000$  برای نسبت منظر یک،  $\varphi = 1$  با بازه‌های  $\Delta\lambda = 1$  رسم شده است. با افزایش تدریجی پارامتر کنترلی از فشارهای آیرودینامیک بی‌بعد کم، ورق الاستیک شروع به ارتعاش می‌کند و در  $\lambda = 508$  فلاتر رخ می‌دهد. ورق ویسکوالاستیک با پارامتر ویسکوز کوچک نیز با توجه به شکل‌های (۴-الف تا ج) رفتاری تقریباً مشابه با ورق الاستیک دارد، یعنی در نزدیکی همین مقدار از پارامتر کنترلی فلاتر رخ می‌دهد. اما همان‌طور که در شکل (۴-د) مشاهده می‌شود با افزایش پارامتر ویسکوز به  $\tau_c = 0/001$  فلاتر زودتر رخ می‌دهد یعنی در  $\lambda = 508$  رفتار ورق ویسکوالاستیک با  $\tau_c = 0/001$  از نوع نوسانات سیکل حدی است در حالی که در این شرایط در ورق الاستیک فلاتر رخ داده است. برای روشن شدن بیشتر این موضوع، برای  $\lambda = 540$  نمودارهای فضای فازی و مقطع پوانکاره برای ورق الاستیک و ورق ویسکوالاستیک در شکل (۴-د) در کنار نمودار چندشاخه‌گی رسم شده، که رفتار حرکت پریودیک با پریود یک را برای هر دو ورق نشان می‌دهد، به‌طوری که دامنه نوسانات برای ورق ویسکوالاستیک از ورق الاستیک بیشتر است.

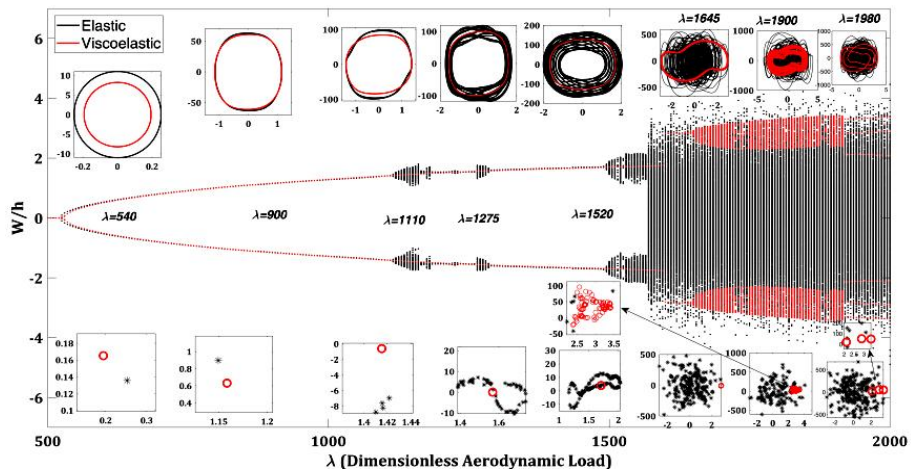
با افزایش بیشتر پارامتر کنترلی تا  $\lambda = 1105$  رفتار ورق الاستیک و ویسکوالاستیک به‌صورت هارمونیک ساده خواهد بود. به‌طور مثال در فشار آیرودینامیک بی‌بعد  $\lambda = 900$  ورق ویسکوالاستیک با پارامتر ویسکوز کوچک رفتاری نزدیک به



(الف)

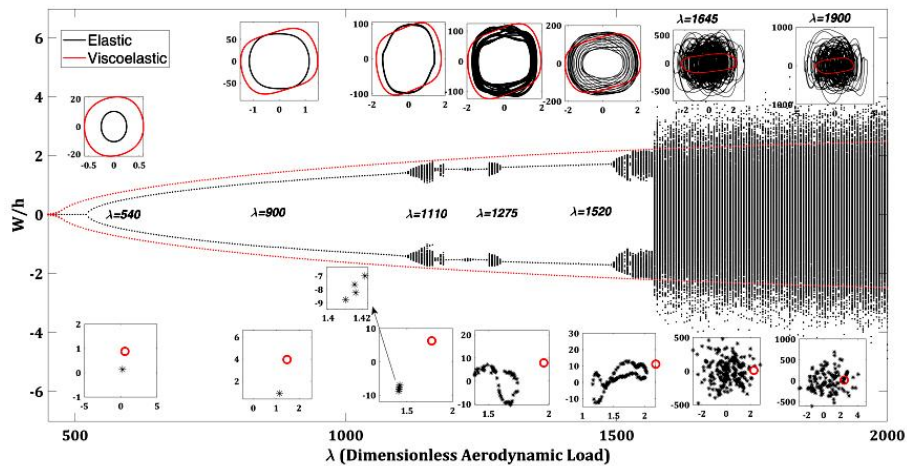


(ب)



(ج)

شکل ۴- دیاگرام چندشاخگی برای ورق‌های با لبه‌های مفصلی مربعی با  $\delta = 0.05$ ، رنگ سیاه مربوط به ورق الاستیک و رنگ قرمز مربوط به ورق ویسکو الاستیک با پارامترهای ویسکوز الف)  $\tau_c = 0.000001$  ب)  $\tau_c = 0.000001$  ج)  $\tau_c = 0.00001$  د)  $\tau_c = 0.00001$  (رنگی در نسخه الکترونیکی)



(د)

ادامه شکل ۴- دیاگرام چندشاخگی برای ورق‌های با لبه‌های مفصلی مربعی با  $\delta = 0/05$ ، رنگ سیاه مربوط به ورق الاستیک و رنگ قرمز مربوط به ورق ویسکوالاستیک با پارامترهای ویسکوز الف)  $\tau_c = 0/000001$  (ب)  $\tau_c = 0/000001$  (ج)  $\tau_c = 0/0001$  (د)  $\tau_c = 0/0001$  (رنگی در نسخه الکترونیکی)

جدول ۳- تغییر رفتار ورق در فشارهای آیرودینامیک مختلف

$\lambda = 1900$	$\lambda = 1645$	$\lambda = 1520$	$\lambda = 1275$	$\lambda = 1110$	$\lambda = 900$	$\lambda = 540$	
آشوبناک	آشوبناک	شبه‌پریودیک	شبه‌پریودیک	پریود ۴	پریود ۱	پریود ۱	الاستیک
آشوبناک	شبه‌پریودیک	پریود ۴	شبه‌پریودیک	پریود ۱	پریود ۱	پریود ۱	ویسکوالاستیک $\tau_c = 0/000001$
آشوبناک	شبه‌پریودیک	پریود ۱	پریود ۲	پریود ۱	پریود ۱	پریود ۱	ویسکوالاستیک $\tau_c = 0/000001$
شبه‌پریودیک	شبه‌پریودیک	پریود ۱	پریود ۱	پریود ۱	پریود ۱	پریود ۱	ویسکوالاستیک $\tau_c = 0/0001$
پریود ۱	پریود ۱	پریود ۱	پریود ۱	پریود ۱	پریود ۱	پریود ۱	ویسکوالاستیک $\tau_c = 0/0001$

ویسکوالاستیک با پارامتر ویسکوز بالاتر، رفتار آن نسبت به ورق الاستیک ناپایدارتر است اما هر چه فشار آیرودینامیک بی‌بعد افزایش یابد ورق ویسکوالاستیک رفتارهای ساده‌تری نسبت به ورق الاستیک خواهد داشت. در جدول (۳)، خلاصه نتایج مهم آمده است.

### ۳-۳-۲- نسبت منظر $\rho = 0/5$

در شکل (۵)، نمودارهای چندشاخگی، برای فشار آیرودینامیکی

$\lambda = 1900$  با  $\tau_c = 0/000001$  و  $\tau_c = 0/000001$  شکل (۴- الف) و (ب) آشوبناک و با  $\tau_c = 0/0001$  شکل (۴- ج) شبه‌پریودیک و در  $\tau_c = 0/0001$  شکل (۴- د) پریود ۱ است.

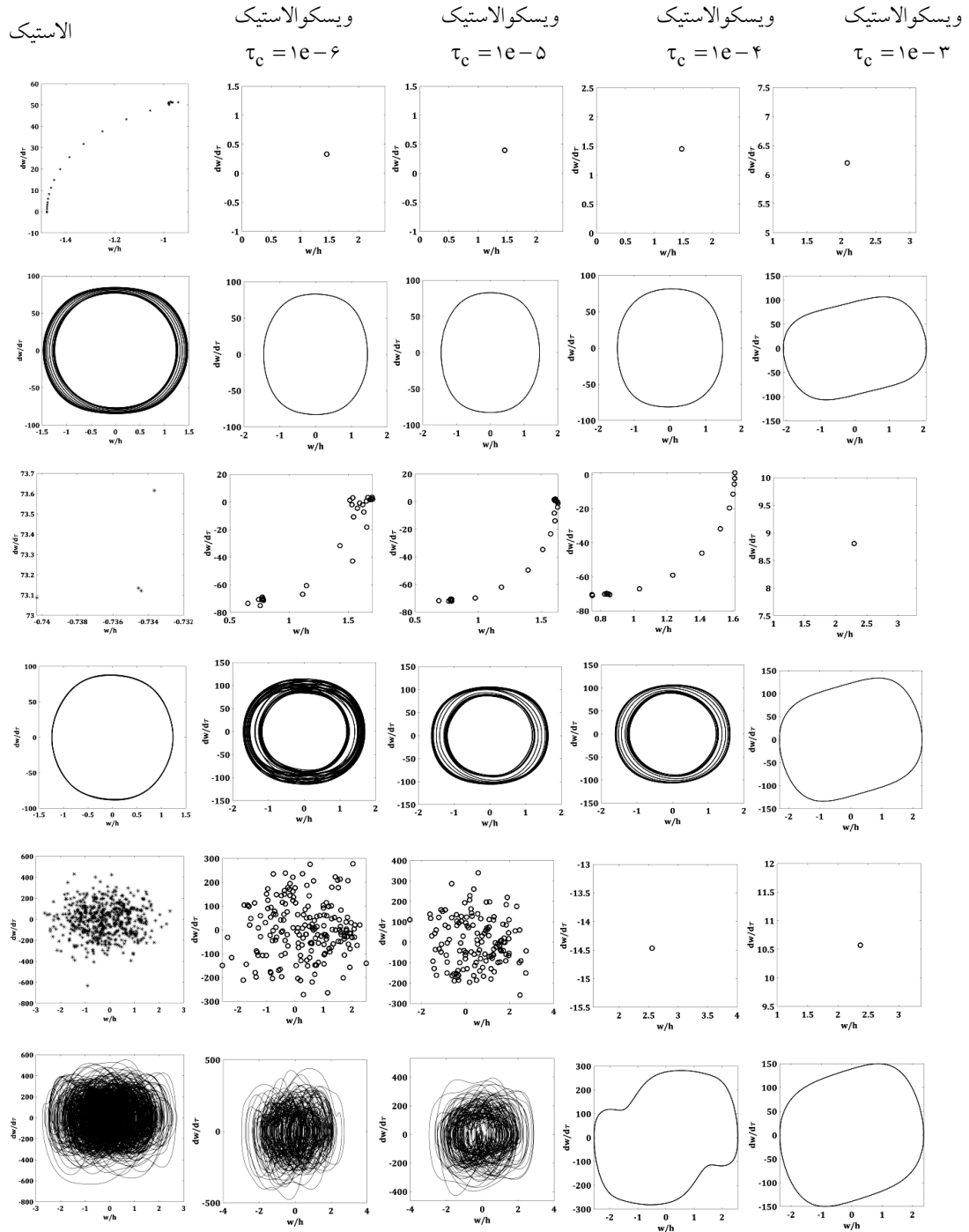
نکته مهمی در شکل (۴- ج) در  $1920 < \lambda < 2000$  مشاهده می‌شود، برای نمونه در  $\lambda = 1980$  در ورق الاستیک حرکت آشوبناک، و در ورق ویسکوالاستیک با پارامتر ویسکوز  $\tau_c = 0/0001$  حرکت از نوع پریود ۳ است. به‌طور خلاصه در این نسبت منظری، در ابتدای رخداد فلاتر در ورق



شکل ۵- دیاگرام چندشاخگی برای ورق‌های با لبه‌های مفصلی الاستیک و ویسکوالاستیک مستطیلی با  $\delta = 0.05$  و نسبت منظری  $\varphi = 0.5$ ، با پارامترهای ویسکوز الف)  $\tau_c = 0.000001$  ب)  $\tau_c = 0.000001$  ج)  $\tau_c = 0.00001$  د)  $\tau_c = 0.00001$  (رنگی در نسخه الکترونیکی)

ویسکوالاستیک با  $\tau_c = 0.00001$  در بازه  $1100 < \lambda < 395$  و  $1435 < \lambda < 1330$  پریودیک است و بعد از آن آشوبناک خواهد شد. مطابق شکل (۵-د)، ورق ویسکوالاستیک با  $\tau_c = 0.00001$  در محدوده فشار آیرودینامیکی ذکر شده از نوع پریود ۱ است. در شکل (۶)، نمودارهای فضای فازی و مقطع پوانکاره برای ورق الاستیک، و ورق ویسکوالاستیک با چهار خاصیت ویسکوز، در سه فشار مختلف آیرودینامیک بی‌بعد ( $\lambda$ ) نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که اگر خاصیت ویسکوز به اندازه کافی بزرگ باشد حرکت آشوبناک را در ورق ویسکوالاستیک نسبت به ورق الاستیک به تأخیر می‌اندازد. به‌طور مثال در  $\lambda = 1000$  رفتار شبه‌پریودیک ورق الاستیک به رفتار پریودیک در ورق ویسکوالاستیک تغییر می‌یابد. در

بی‌بعد از  $\lambda = 5$  تا  $\lambda = 2000$  برای نسبت منظر  $\varphi = 0.5$  با بازه‌های  $\Delta\lambda = 5$  رسم شده است. با توجه به نمودارها، ورق الاستیک در بازه  $390 < \lambda < 895$  رفتار پریودیک با پریود ۱ دارد که در بازه  $1195 < \lambda < 895$  به رفتارهای پیچیده غیرخطی تبدیل شده و بعد از آن در بازه  $1245 < \lambda < 1200$  دوباره رفتار پریودیک مشاهده می‌شود، و سرانجام برای  $\lambda > 1250$  به حرکت آشوبناک تبدیل می‌شود. مطابق شکل (۵-الف)، ورق ویسکوالاستیک با  $\tau_c = 0.000001$  در بازه  $395 < \lambda < 1155$  رفتاری پریودیک با پریود ۱ دارد، که با افزایش خاصیت ویسکوز به  $\tau_c = 0.00001$  بازه این حرکت پریودیک به بازه  $395 < \lambda < 1160$  تغییر می‌یابد، شکل (۵-ب). نکته مهم در شکل (۵-ج) اتفاق می‌افتد به‌طوری که رفتار ورق

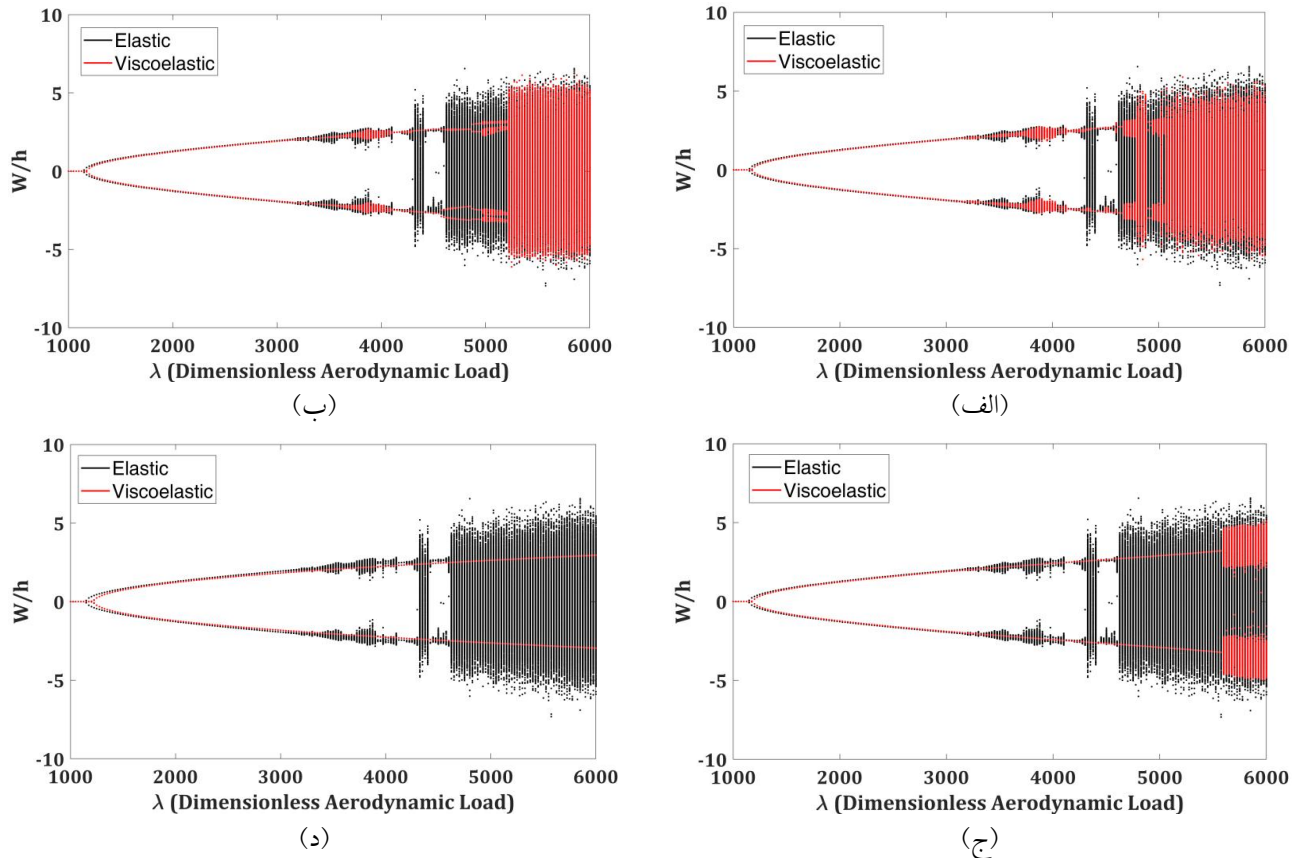


شکل ۶- مقطع پوانکاره و فضای فازی ورق‌های با لبه‌های مفصلی الاستیک و ویسکوالاستیک

۱ خواهد بود. بنابراین ورق ویسکوالاستیک با پارامتر ویسکوز کوچک ممکن است مناسب نباشد و در برخی فشارهای آیرودینامیک رفتار پیچیده‌تری نسبت به ورق الاستیک نشان دهد. در فشار آیرودینامیک بی بعد  $\lambda = 1400$  در ورق الاستیک

ورق ویسکوالاستیک با ضرایب ویسکوز پایین رفتار پیچیده‌تری نسبت به ورق الاستیک دارد یعنی از نوع پرپود ۳ است، اما با افزایش ضریب ویسکوز ورق ویسکوالاستیک به رفتار ورق ویسکوالاستیک ساده‌تر و از نوع پرپود  $\tau_c = 0/001$





شکل ۷- دیاگرام چندشاخگی برای ورق‌های با لبه‌های مفصلی الاستیک و ویسکوالاستیک مستطیلی با  $\delta = 0.05$  و نسبت منظر  $\phi = 2$  و پارامترهای ویسکوز (الف)  $\tau_c = 0.000001$  (ب)  $\tau_c = 0.000001$  (ج)  $\tau_c = 0.00001$  (د)  $\tau_c = 0.0001$  (رنگی در نسخه الکترونیکی)

پارامتر ویسکوز به‌طور کامل محو می‌شود و در فشارهای آیرودینامیکی نسبتاً بالاتری دچار رفتارهای پیچیده می‌شود.

### ۳-۳-۳- نسبت منظر $\phi = 2$

در شکل (۷)، نمودارهای چندشاخگی، برای فشار آیرودینامیکی بی‌بعد از  $\lambda = 1000$  تا  $\lambda = 6000$  برای نسبت منظر  $\phi = 2$  با بازه‌های  $\Delta\lambda = 25$  رسم شده است. ورق الاستیک در فشار آیرودینامیکی بی‌بعد  $\lambda = 1125$  دچار ناپایداری شده و در این فشار بحرانی، فلاتر رخ می‌دهد. حرکت پریودیک با پریود ۱ در بازه  $3025 < \lambda < 1125$  ادامه دارد تا رفتار ورق در بازه  $4100 < \lambda < 3050$  از حالت پریودیک پیچیده‌تر شود. ورق الاستیک در بازه  $4175 < \lambda < 4125$  پنجره‌ای از حرکت پریودیک با پریود ۱ را

و نیز ورق ویسکوالاستیک با ضرایب ویسکوز پایین، رفتار آشوبناک رخ می‌دهد، اما با افزایش پارامتر ویسکوز به  $\tau_c = 0.0001$  رفتار ورق ویسکوالاستیک از نوع پریود ۱ خواهد بود. به‌طوری که مشاهده می‌شود در تمامی نمودارها رفتار برای ورق ویسکوالاستیک با پارامتر ویسکوز  $\tau_c = 0.0001$  از نوع پریود ۱ است.

بنابراین در این نسبت منظری، استفاده از ورق ویسکوالاستیک مفید است. ورق ویسکوالاستیک با پارامتر ویسکوز پایین در برخی فشارهای آیرودینامیک بی‌بعد دچار رفتارهای پیچیده غیرخطی می‌شود اما در بسیاری از فشارهای آیرودینامیک، رفتارهای پیچیده غیرخطی که در ورق الاستیک رخ می‌دهد با استفاده از خاصیت ویسکوز به تأخیر می‌افتد. این رفتارهای پیچیده غیرخطی در ورق ویسکوالاستیک با افزایش

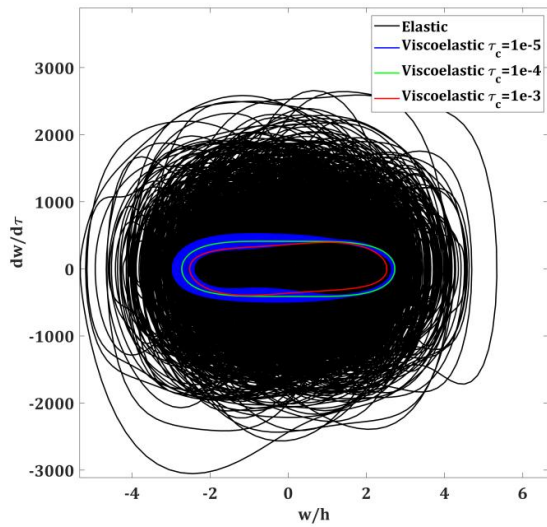
ورق الاستیک در این بازه‌ها آشوبناک است. ورق ویسکوالاستیک پس از فشار آیرودینامیک ذکر شده دارای رفتار آشوبناک می‌شود. به طوری که در شکل (۷-ج) نشان داده شده است با افزایش پارامتر ویسکوز به  $\tau_c = 0/0001$  در فشار آیرودینامیک  $\lambda = 1175$  فلاتر رخ داده و پس از آن تا  $\lambda = 5575$  دامنه حرکت پرئودیک با پرئود ۱ افزایش یافته است. بنابراین اثرات نامطلوبی که در ورق الاستیک در فشارهای آیرودینامیک بالا رخ می‌دهد، در ورق ویسکوالاستیک با چنین پارامتر ویسکوزی برطرف شده و به حرکت پرئودیک ساده تبدیل می‌شود. شکل (۷-د) حذف کامل اثرات نامطلوب ورق با پارامتر ویسکوز  $\tau_c = 0/001$  در فشارهای آیرودینامیک ذکر شده را نسبت به ورق الاستیک نشان می‌دهد. همچنین فلاتر در  $\lambda = 1225$  رخ داده، که در مقایسه با ورق الاستیک به تأخیر افتاده است.

در شکل (۸)، نمودارهای پاسخ زمانی، فضای فازی، مقطع پوانکاره و طیف توانی برای ورق الاستیک و ورق ویسکوالاستیک با سه خاصیت ویسکوز در فشار آیرودینامیک بی‌بعد  $\lambda = 4625$  نشان داده شده است. در این نمودارها، حرکت آشوبناک در ورق الاستیک به طور کامل قابل مشاهده است، اما با افزایش پارامتر ویسکوز در ورق ویسکوالاستیک به بسته‌ای از نقاط را نشان می‌دهد، به حرکت شبه‌پرئودیک تغییر می‌کند. افزایش پارامتر ویسکوز به  $\tau_c = 0/0001$  و  $\tau_c = 0/001$  طبق نمودار پوانکاره یک نقطه در نمودار نشان می‌دهد که مؤید تغییر رفتار ورق به حرکت پرئود ۱ است.

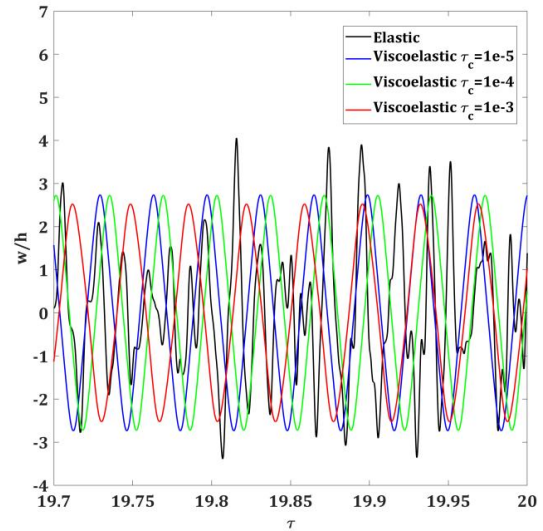
### ۳-۳-۴- نسبت منظر $\varphi = 4$

آخرین نسبت منظری که مورد بررسی قرار می‌گیرد، نسبت منظر  $\varphi = 4$  است. در این نسبت منظر، خاصیت ویسکوز موجب تأخیر فلاتر می‌شود. این برخلاف رفتار نشان داده شده در نسبت منظر  $\varphi = 1$ ، در بخش ۳-۳-۱ است. در شکل (۹)، نمودارهای چندشاخگی، برای فشار آیرودینامیکی بی‌بعد از

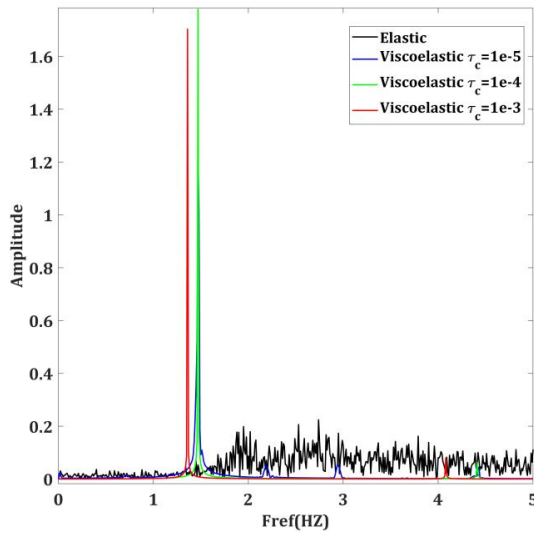
نشان می‌دهد اما بعد از آن در بازه  $4200 < \lambda < 4400$  رفتار ورق از نوع آشوبناک خواهد بود. بار دیگر در بازه  $4200 < \lambda < 4600$  تغییر رفتاری به صورت حرکت پرئودیک با پرئودهای بالا و نیز شبه‌پرئودیک مشاهده می‌شود. پس از این فشار آیرودینامیکی، حرکت ورق الاستیک به طور کامل آشوبناک می‌شود. اما در ورق ویسکوالاستیک، برای نمونه ورق ویسکوالاستیک با پارامتر ویسکوز  $\tau_c = 0/000001$  همان طور که در شکل (۷-الف) نشان داده شده، فلاتر در فشار بحرانی  $\lambda = 1175$  رخ داده است. پس از آن در بازه  $3175 < \lambda < 1175$  رفتار ورق از نوع پرئودیک با پرئود ۱ است اما در بازه  $4350 < \lambda < 3200$  حرکت با پرئودهای بالاتر رخ می‌دهد، و نیز پنجره‌ای از حرکت پرئودیک در بازه  $4575 < \lambda < 4275$  مشاهده می‌شود. نکته قابل توجه اینکه در بازه‌های  $4400 < \lambda < 4325$  و  $4925 < \lambda < 4900$  رفتار ورق ویسکوالاستیک در این نسبت ویسکوز، پرئودیک است در حالی که حرکت ورق الاستیک از نوع آشوبناک خواهد بود. در بازه  $6000 < \lambda < 4950$  ورق ویسکوالاستیک نیز دچار رفتار آشوبناک می‌شود. رفتار در ورق ویسکوالاستیک با افزایش پارامتر ویسکوز بهبود می‌یابد، به طوری که در شکل (۷-ب) برای پارامتر ویسکوز  $\tau_c = 0/00001$  با وجود اینکه فلاتر نسبت به پارامتر ویسکوز قبل تغییر محسوسی نکرده، اما تغییر رفتار فاحش در فشارهای آیرودینامیکی بالاتر مشاهده می‌شود. در بازه  $3475 < \lambda < 1175$  رفتار ورق ویسکوالاستیک از پرئود ۱ است اما در بازه  $4100 < \lambda < 3500$  رفتار ورق ویسکوالاستیک پرئودیک با پرئودهای بالا و شبه‌پرئودیک است. در بازه  $4175 < \lambda < 4125$  رفتار ورق دوباره از نوع پرئود یک بوده و با افزایش تدریجی فشار آیرودینامیکی رفتار ورق دوباره تغییر کرده و پرئودهای حرکتی مختلف در بازه  $4275 < \lambda < 4200$  مشاهده می‌شود تا بار دیگر در بازه  $4600 < \lambda < 4300$  که رفتار ورق از نوع پرئود ۱ شود. ورق ویسکوالاستیک در بازه  $5225 < \lambda < 4625$  تنوعی از رفتارهای پرئودیک و شبه‌پرئودیک را نشان می‌دهد در حالی که رفتار



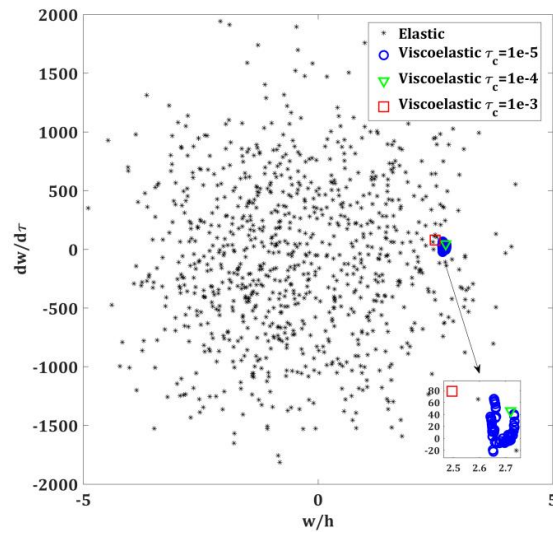
(ب)



(الف)



(د)

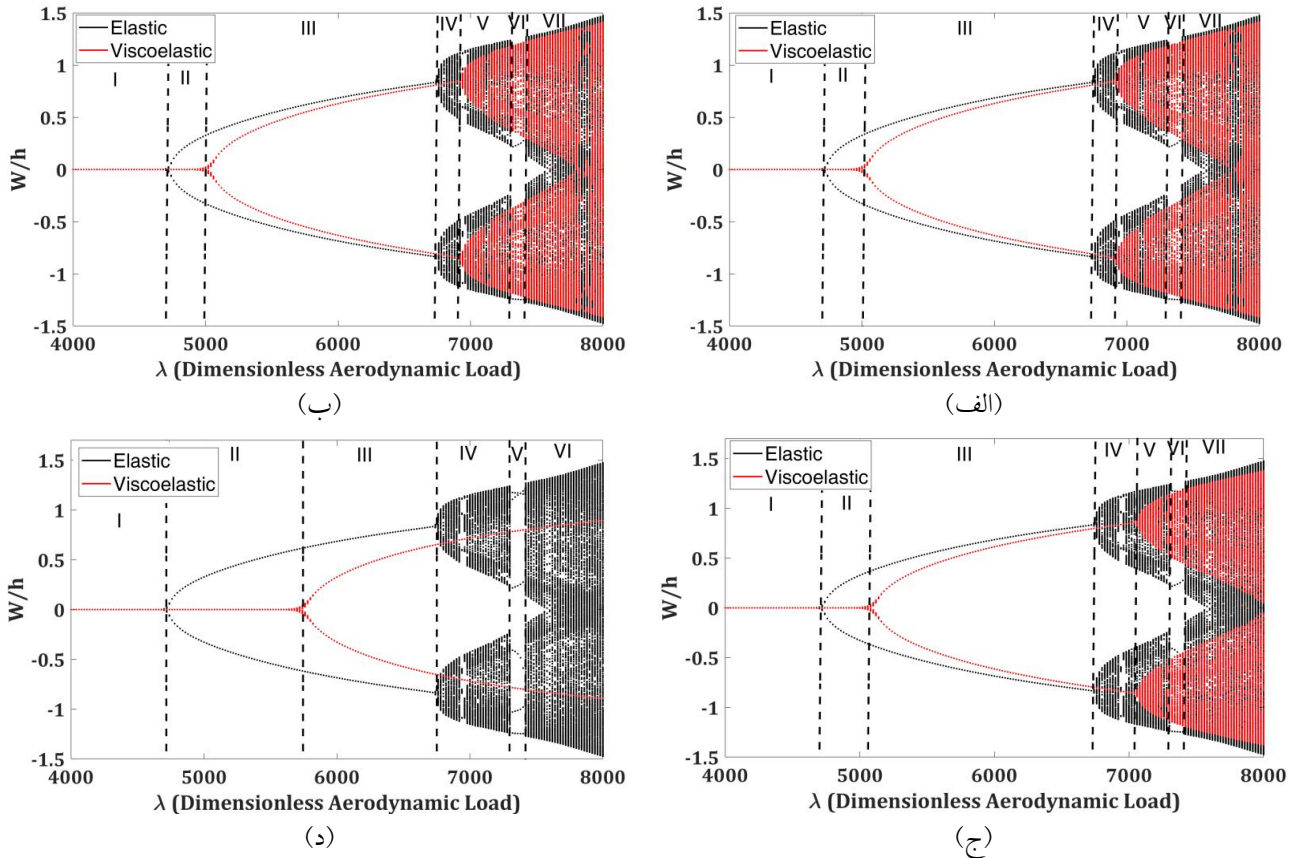


(ج)

شکل ۸- الف) پاسخ زمانی، ب) فضای فازی، ج) مقطع پوانکاره، د) طیف توانی، در فشار آیرودینامیک بی بعد  $\lambda = 4625$  در ورق‌های با لبه‌های مفصلی الاستیک و ویسکوالاستیک (رنگی در نسخه الکترونیکی)

مفید است. اولین مزیت آن تأخیر در وقوع فلاتر تا فشار آیرودینامیک بی بعد  $\lambda = 5000$  است، اما مزیت بعدی افزایش دامنه حرکت پریودیک با پرپود ۱ تا فشار آیرودینامیک بی بعد  $\lambda = 6900$  است، درحالی که ورق الاستیک در بازه  $6900 < \lambda < 6760$  دارای رفتار آشوبناک است. در شکل (۹) - با افزایش پارامتر ویسکوز به  $\tau_c = 0/000001$  رفتاری مشابه با نسبت ویسکوز قبل مشاهده می‌شود به طوری که در فشار آیرودینامیکی بی بعد  $\lambda = 5020$  فلاتر رخ داده و رفتار پریودیک

$\lambda = 4000$  تا  $\lambda = 8000$  با بازه‌های  $\Delta\lambda = 20$  رسم شده است. فلاتر در ورق الاستیک در فشار آیرودینامیک بحرانی  $\lambda = 4720$  رخ می‌دهد، سپس در بازه  $6760 < \lambda < 4720$  حرکت از نوع پرپود ۱ بوده که ناگهان بعد از  $\lambda = 6760$  به جز پنجره‌ای در بازه  $7400 < \lambda < 7320$  که حرکت ورق، پریودیک با پرپود ۳ است، رفتار ورق الاستیک شبه پریودیک و آشوبناک می‌شود. استفاده از خاصیت ویسکوز با پارامتر ویسکوز  $\tau_c = 0/000001$  در ورق همان‌طور که در شکل (۹- الف) نشان داده شده است بسیار



شکل ۹- دیاگرام چندشاخگی برای ورق‌های با لبه‌های مفصلی الاستیک و ویسکوالاستیک مستطیلی با  $\delta = 0.05$  و نسبت منظر  $\varphi = 2$  و پارامترهای ویسکوز (الف)  $(\tau_c = 0.00001)$  (ب)  $(\tau_c = 0.00001)$  (ج)  $(\tau_c = 0.00001)$  و (د)  $(\tau_c = 0.001)$  (رنگی در نسخه الکترونیکی)

شکل‌های (الف-۹) تا (ج-۹) با شش خط چین و در شکل (د-۹) با پنج خط چین جدا شده‌اند. در منطقه (I) ارتعاشات میرا و پایدار است. در منطقه (II) ورق الاستیک دارای حرکت پریودیک و ورق ویسکوالاستیک هنوز در شرایط پایدار است. گستره منطقه (II) برای ورق ویسکوالاستیک با  $\tau_c = 0.001$  از دیگر نسبت‌های ویسکوز بزرگ‌تر است. در منطقه (III) ورق الاستیک و ورق ویسکوالاستیک هر دو دارای حرکت هارمونیک هستند. در منطقه (IV) رفتار ورق الاستیک آشوبناک، اما رفتار ورق ویسکوالاستیک هارمونیک است. در منطقه (V) رفتار ورق ویسکوالاستیک با خاصیت ویسکوز پایین مانند شکل‌های (الف-۹) تا (ج-۹) آشوبناک، اما برای  $\tau_c = 0.001$ ، شکل (د-۹)، و تا  $\lambda = 8000$

تا  $\lambda = 6920$  ادامه پیدا می‌کند و پس از آن رفتار ورق ویسکوالاستیک آشوبناک خواهد شد. با افزایش مجدد پارامتر ویسکوز به  $\tau_c = 0.00001$  نیز مطابق شکل (ج-۹)، مانند دو پارامتر ویسکوز ذکر شده، فلاتر در فشار آیرودینامیکی بی‌بعد  $\lambda = 5100$  رخ می‌دهد، سپس تا  $\lambda = 7040$  رفتار از نوع پریودیک است، اما پس از آن رفتار ورق به‌طور کامل آشوبناک می‌شود. برخلاف شکل‌های قبل آنچه در (شکل ۹-د) مشاهده می‌شود نشان می‌دهد که استفاده از پارامتر ویسکوز بالاتر تا  $\tau_c = 0.001$  وقوع فلاتر و رفتار آشوبناک را به شدت به تأخیر می‌اندازد. فلاتر در این حالت در در فشار آیرودینامیکی بی‌بعد  $\lambda = 5740$  رخ می‌دهد. به‌طور خلاصه می‌توان گفت نواحی مختلف، در

ساده و از نوع پریود ۱ است.

از حرکت پریودیک در ورق الاستیک وجود داشت که در ورق ویسکوالاستیک به شکل پریودیک مشاهده نشد. در ورق با خاصیت ویسکوز انتظار می‌رود وقوع فلاتر دیرتر باشد اما برای برخی نسبت‌های منظری، فلاتر زودتر رخ می‌دهد. نتایج برای چهار نسبت منظری مورد بررسی قرار گرفت. در نسبت منظر  $\varphi=1$  و  $\varphi=0.5$  فلاتر در ورق ویسکوالاستیک زودتر از ورق الاستیک رخ می‌دهد اما با افزایش نسبت منظری به  $\varphi=2$  و  $\varphi=4$  فلاتر به تأخیر می‌افتد. با توجه به نتایج به دست آمده مشاهده می‌شود که با استفاده از خاصیت ویسکوز، رفتارهای پیچیده غیرخطی ورق الاستیک مانند رفتار آشوبناک و... در فشارهای آیرودینامیک بالا را در بیشتر مواقع می‌توان به حرکت پریودیک تبدیل کرد.

#### ۴- نتیجه‌گیری

در این تحقیق، پایداری آیرودینامیکی و دیگر نوسانات غیرخطی ورق با لبه‌های مفصلی، با نسبت‌های منظری و مشخصه‌های ویسکوز مختلف، در جریان آیرودینامیکی مافوق صوت مورد بررسی قرار گرفت. نتایج برای چهار نسبت ویسکوز به دست آمده و نشان می‌دهد که برای ورق ویسکوالاستیک با مشخصه ویسکوز پایین، رفتار ورق ویسکوالاستیک نزدیک به رفتار ورق الاستیک است، اما در بعضی مقادیر فشار آیرودینامیکی، رفتار شبه پریودیک و آشوبناک به رفتارهای ساده‌تر نظیر پریودیک تغییر می‌یابد. همچنین در بعضی مقادیر فشار آیرودینامیکی، پنجره‌هایی

#### واژه‌نامه

- |                     |                        |                                |
|---------------------|------------------------|--------------------------------|
| 1. flutter          | 10. periodic           | 19. Boltzmann- Volterra theory |
| 2. limit cycle      | 11. Runge-Kutta method | 20. Bubnov- Galerkin           |
| 3. chaotic          | 12. Kelvin model       | 21. bifurcation                |
| 4. clamped          | 13. piston theory      | 22. aerodynamic load           |
| 5. simply cupported | 14. subsonic           | 23. lagrange                   |
| 6. time history     | 15. supersonic         | 24. reighley ritz method       |
| 7. phase portrait   | 16. resonance          | 25. mode shape                 |
| 8. poincaré map     | 17. pasive control     | 26. in- plane                  |
| 9. power spectra    | 18. flight angle       | 27. contorol parameter         |

#### مراجع

- Dowell, E. H., "Nonlinear Oscillations of a Fluttering Plate", *AIAA Journal*, Vol. 4, No. 7, pp. 1267-1275, 1966.
- Dowell, E. H., "Nonlinear Oscillations of a Fluttering Plate II", *AIAA Journal*, Vol. 5, No. 10, pp 1856-1862, 1967.
- Weiliang, Y. and Dowell, E. H., "Limit Cycle Oscillation of a Fluttering Cantilever Plate", *AIAA Journal*, Vol. 29, No. 11, pp. 1929-1936. 1991.
- Xie, D., Xu, M., Dai, H. and Dowell, E. H., "Observation and Evolution of Chaos for a Cantilever Plate in Supersonic Flow", *Journal of Fluids and Structures*, Vol, 50, pp. 271-291, 2014.
- Xia, Z.Q. and Lukasiewicz, S., "Non- Linear, Free, Damped Vibrations of Sandwich Plates", *Journal of Sound and Vibration*, Vol, 175, No. 2, pp.219-232, 1994.
- Lukasiewicz, S. and Xia, Z. Q., "Nonlinear Damped Vibrations of Simply- Supported Sandwich Plates in a Rapidly Changing Temperature Field", *Nonlinear Dynamics*, Vol. 9, pp. 369-389, 1996.
- Sun, Y. X. and Zhang, S. Y., "Chaotic Dynamic Analysis of Viscoelastic Plates", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 43, No. 5, pp. 1195-1208, 2001.
- Pourtakdoust, S. H. and Fazelzadeh, S. A., "Chaotic Analysis Of Nonlinear Viscoelastic Panel Flutter in Supersonic Flow.", *Nonlinear Dynamics*, Vol. 32, No. 4, pp. 387-404, 2003.
- Khudayarov, B., "Flutter of a Viscoelastic Plate in a Supersonic Gas Flow", *International Applied Mechanics*, Vol. 46, No. 4, pp. 455-460, 2010.
- Merrett, C. G. and Hilton, H., "Elastic and Viscoelastic Panel Flutter in Incompressible,

- Subsonic and Supersonic Flows”, *ASDJournal*, Vol. 2, No. 1, pp. 53-80, 2010.
11. Saksa, T., Banichuk, N., Jeronen, J., Kurki, M. and Tuovinen, T., “Dynamic Analysis for Axially Moving Viscoelastic Panels”, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 49, pp. 3355-3366, 2012.
  12. Amabili, M., “Nonlinear Vibrations of Viscoelastic Rectangular Plates”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol 362, pp. 142-156 2016.
  13. Yang, X. D., Yu, T. J., Zhang, W., Qian, Y. J. and Yao, M. H., “Damping Effect on Supersonic Panel Flutter of Composite Plate with Viscoelastic Mid-Layer”, *Composite Structures*, Vol. 137, pp. 105-113, 2016.
  14. Cunha- Filho, A. G., De Lima, A. M. G., Donadon, M. V., and Leão, L. S., “Flutter Suppression of Plates Using Passive Constrained Viscoelastic Layers”, *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol 79, pp. 99-111, 2016.
  15. Usmonov, B. Sh., “Dynamic Instability of Viscoelastic Plate in Supersonic Flow”, *International Journal of Advanced Engineering, Management and Science (IJAEMS)*, Vol. 3, No. 2, pp. 35-39, 2017.
  16. Wang, X., Yang, Z., Wang, W. and Tian, W. Nonlinear Viscoelastic Heated Panel Flutter with Aerodynamic Loading Exerted on Both Surfaces”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 409, pp. 306-317, 2017.
  17. Rade, D. A., Deü, J.- F., Castello, D. A., de Lima, A. M. G. and Rouleau, L., *Nonlinear Structural Dynamics and Damping chapter 5: Passive Vibration Control Using Viscoelastic Materials*, Mechanisms and Machine Science, Vol. 69, pp. 119-168, Springer Nature Switzerland AG, 2019.
  18. Sherov, A.G., Khudayarov, B.A., Ruzmetov, K.Sh. and Aliyarov, J., “Numerical Investigation of the Effects Angles of Attack on the Flutter of a Viscoelastic Plate”, *Advances in Aircraft and Spacecraft Science*, Vol. 3, pp. 215-228, 2020.
  19. Khudayarov, B., Turayev, F., Zhuvonov, Q., Vahobov, V., Kucharov, O., and Kholturaev, Kh., “Oscillation Modeling of Viscoelastic Elements of Thin- Walled Structures”, *In IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, Vol. 883, No. 1, p. 012188. IOP Publishing, 2020.
  20. Lakes, R., *Viscoelastic Materials*, Cambridge University Press, NewYork, USA, 2009.
  21. Ashley, H., Zartarian, G., “*Piston Theory a New Aerodynamic Tools for the Aeroelastician*”, Vol. 23, No. 12, pp. 1109-1118, 1956.
  22. Dowell, E. H., *Aeroelasticity of Plates and Shells*, Noordhoff, Leyden, 1975.
  23. Xue, D. Y., “Finite Element Frequency Domain Solution of Nonlinear Plate Flutter With Temperature Effects and Fatigue Life Analysis”, *PhD dissertation, Engineering Mechanics, Old Dominion University, Norfolk, VA*; 1991.
  24. Rao, S. S., *Vibration of Continuous Systems*, John Wiley and Sons, Hoboken, New Jersey 2007.
  25. Valizadeh, N., Natarajan, S., Gonzalez- Estrada, O. A., Rabczuk, T., Bui, T. Q. and Bordas, S. P., “NURBS- Based Finite Element Analysis of Functionally Graded Plates: Static Bending, Vibration, Buckling and Flutter”, *Composite Structures*, Vol. 99, pp.309-326, 2013.
  26. Grover, N., Maiti; N. K. and Singh, B. N., “Flutter Characteristics of Laminated Composite Plates Subjected to Yawed Supersonic Flow Using Inverse Hyperbolic Shear Deformation Theory”, *Journal of Aerospace Engineering*, Vol. 29, No. 2, p. 04015038, 2016.
  27. Xie, D., Xu, M., Dai, H., and Dowell, E. H., “Proper Orthogonal Decomposition Method for Analysis of Nonlinear Panel Flutter with Thermal Effects in Supersonic Flow”, *Journal of Sound and Vibration*, 337, pp. 263-283, 2015.
  28. Abdel- Motaglay, K., Chen, R., Mei, C., “Nonlinear Flutter of Composite Oanels under Yawed Supersonic Flow Using Finite Elements”, *AIAA Journal*, Vol. 37, No. 9, pp. 1025-1032, 1999.
  29. AsadiGorgi, H., Dardel, M., and Pashaei, M .H., Effects of All- Over Part- Through Cracks on the Aeroelastic Characteristics of Rectangular Panels”, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 39, No. 23-24, pp. 7513-7536, 2015.

## پيوست

پارامترهای معرفی شده در رابطه (۱۳) به شرح ذیل است:

$$ap^1 \Rightarrow Mu = \sum_{g=h=1}^G \sum_{h=1}^H a_{gh}(\tau) \int_0^1 u_i' u_g' d\xi \int_0^1 v_j v_h d\eta$$

$$ap^2 \Rightarrow Kuu^2 = \sum_{g=h=1}^G \sum_{h=1}^H a_{gh}(\tau) \int_0^1 u_i' u_g' d\xi \int_0^1 v_j v_h d\eta$$

$$ap^{\tau} \Rightarrow NLuw^{\lambda} = \sum_{o=1}^O \sum_{p=1}^P q_{op}(\tau) \sum_{o_1=1}^{O_1} \sum_{p_1=1}^{P_1} q_{o_1 p_1}(\tau) \int u_i' \phi_o' \phi_{o_1}' d\xi \int v_j' \psi_p' \psi_{p_1}' d\eta$$

$$ap^{\tau} \Rightarrow Kuv^{\lambda \gamma} = \sum_{f=d=1}^{F D} b_{fd}(\tau) \int u_i' u_f' d\xi \int v_j' v_d' d\eta$$

$$ap^{\delta} \Rightarrow NLuw^{\gamma} = \sum_{o=1}^O \sum_{p=1}^P q_{op}(\tau) \sum_{o_1=1}^{O_1} \sum_{p_1=1}^{P_1} q_{o_1 p_1}(\tau) \int u_i' \phi_o' \phi_{o_1}' d\xi \int v_j' \psi_p' \psi_{p_1}' d\eta$$

$$ap^{\delta} \Rightarrow Kuv^{\gamma \tau} = \sum_{f=d=1}^{F D} b_{fd}(\tau) \int u_i' u_f' d\xi \int v_j' v_d' d\eta$$

$$ap^{\nu} \Rightarrow Kuu^{\tau \tau} = \sum_{g=h=1}^{G H} a_{gh}(\tau) \int u_i' u_g' d\xi \int v_j' v_h' d\eta$$

$$ap^{\lambda} \Rightarrow NLuw^{\tau} = \sum_{o=1}^O \sum_{p=1}^P q_{op}(\tau) \sum_{o_1=1}^{O_1} \sum_{p_1=1}^{P_1} q_{o_1 p_1}(\tau) \int u_i' \phi_o' \phi_{o_1}' d\xi \int v_j' \psi_p' \psi_{p_1}' d\eta$$

$$ap^{\lambda} \Rightarrow Cuv^{\lambda \gamma} = \sum_{g=h=1}^{G H} \dot{a}_{gh}(\tau) \int u_i' u_g' d\xi \int v_j' v_h' d\eta$$

$$ap^{\lambda} \Rightarrow NLCuw^{\lambda} = \sum_{o=1}^O \sum_{p=1}^P q_{op}(\tau) \sum_{o_1=1}^{O_1} \sum_{p_1=1}^{P_1} \dot{q}_{o_1 p_1}(\tau) \int u_i' \phi_o' \phi_{o_1}' d\xi \int v_j' \psi_p' \psi_{p_1}' d\eta$$

$$ap^{\lambda} \Rightarrow Cuv^{\lambda \gamma} = \sum_{f=d=1}^{F D} \dot{b}_{fd}(\tau) \int u_i' u_f' d\xi \int v_j' v_d' d\eta$$

$$ap^{\lambda} \Rightarrow NLCuw^{\gamma} = \sum_{o=1}^O \sum_{p=1}^P q_{op}(\tau) \sum_{o_1=1}^{O_1} \sum_{p_1=1}^{P_1} \dot{q}_{o_1 p_1}(\tau) \int u_i' \phi_o' \phi_{o_1}' d\xi \int v_j' \psi_p' \psi_{p_1}' d\eta$$

$$ap^{\lambda} \Rightarrow Cuv^{\tau \tau} = \sum_{f=d=1}^{F D} \dot{b}_{fd}(\tau) \int u_i' u_f' d\xi \int v_j' v_d' d\eta$$

$$ap^{\lambda} \Rightarrow Cuv^{\tau \tau} = \sum_{g=h=1}^{G H} \dot{a}_{gh}(\tau) \int u_i' u_g' d\xi \int v_j' v_h' d\eta$$

$$ap^{\lambda} \Rightarrow NLCuw^{\tau} = \sum_{o_1=1}^{O_1} \sum_{p_1=1}^{P_1} q_{o_1 p_1}(\tau) \sum_{o=1}^O \sum_{p=1}^P \dot{q}_{op}(\tau) \int u_i' \phi_o' \phi_{o_1}' d\xi \int v_j' \psi_p' \psi_{p_1}' d\eta$$

$$ap^{\lambda} \Rightarrow NLCuw^{\tau} = \sum_{o=1}^O \sum_{p=1}^P q_{op}(\tau) \sum_{o_1=1}^{O_1} \sum_{p_1=1}^{P_1} \dot{q}_{o_1 p_1}(\tau) \int u_i' \phi_o' \phi_{o_1}' d\xi \int v_j' \psi_p' \psi_{p_1}' d\eta$$

$$ap^{\lambda} \Rightarrow Mv = \sum_{f=d=1}^{F D} b_{fd}(\tau) \int u_r' u_f' d\xi \int v_s' v_d' d\eta$$

$$ap^{\lambda} \Rightarrow Kvv^{\lambda \gamma} = \sum_{f=d=1}^{F D} b_{fd}(\tau) \int u_r' u_f' d\xi \int v_s' v_d' d\eta$$

$$ap^{\lambda} \Rightarrow NLvw^{\lambda} = \sum_{o=1}^O \sum_{p=1}^P q_{op}(\tau) \sum_{o_1=1}^{O_1} \sum_{p_1=1}^{P_1} q_{o_1 p_1}(\tau) \int u_r' \phi_o' \phi_{o_1}' d\xi \int v_s' \psi_p' \psi_{p_1}' d\eta$$

$$ap_{\tau 0} \Rightarrow K_{vu} \dot{\gamma} = \sum_{g=1}^G \sum_{h=1}^H a_{gh}(\tau) \int \dot{u}'_g \dot{u}'_h d\xi \int \dot{v}'_s \dot{v}'_h d\eta$$

$$ap_{\tau 1} \Rightarrow N_{Lvw} \dot{\gamma} = \sum_{o=1}^O \sum_{p=1}^P q_{op}(\tau) \sum_{\alpha_1=1}^{O_1} \sum_{\beta_1=1}^{P_1} q_{\alpha_1 \beta_1}(\tau) \int \dot{\phi}'_{\alpha_1} \dot{\phi}'_{\beta_1} \dot{u}'_r d\xi \int \dot{\psi}'_p \dot{\psi}'_{p_1} \dot{v}'_s d\eta$$

$$ap_{\tau 2} \Rightarrow K_{vv} \dot{\gamma} = \sum_{f=1}^F \sum_{d=1}^D b_{fd}(\tau) \int \dot{u}'_r \dot{u}'_f d\xi \int \dot{v}'_s \dot{v}'_d d\eta$$

$$ap_{\tau 3} \Rightarrow K_{vu} \dot{\gamma} = \sum_{g=1}^G \sum_{h=1}^H a_{gh}(\tau) \int \dot{u}'_r \dot{u}'_g d\xi \int \dot{v}'_s \dot{v}'_h d\eta$$

$$ap_{\tau 4} \Rightarrow N_{Lvw} \dot{\gamma} = \sum_{o=1}^O \sum_{p=1}^P q_{op}(\tau) \sum_{\alpha_1=1}^{O_1} \sum_{\beta_1=1}^{P_1} q_{\alpha_1 \beta_1}(\tau) \int \dot{u}'_r \dot{\phi}'_{\alpha_1} \dot{\phi}'_{\beta_1} d\xi \int \dot{v}'_s \dot{\psi}'_p \dot{\psi}'_{p_1} d\eta$$

$$ap_{\tau 5} \Rightarrow C_{vv} \dot{\gamma} = \sum_{f=1}^F \sum_{d=1}^D \dot{b}_{fd}(\tau) \int \dot{u}'_r \dot{u}'_f d\xi \int \dot{v}'_s \dot{v}'_d d\eta$$

$$ap_{\tau 6} \Rightarrow N_{LCvw} \dot{\gamma} = \sum_{o=1}^O \sum_{p=1}^P q_{op}(\tau) \sum_{\alpha_1=1}^{O_1} \sum_{\beta_1=1}^{P_1} \dot{q}_{\alpha_1 \beta_1}(\tau) \int \dot{u}'_r \dot{\phi}'_{\alpha_1} \dot{\phi}'_{\beta_1} d\xi \int \dot{v}'_s \dot{\psi}'_p \dot{\psi}'_{p_1} d\eta$$

$$ap_{\tau 7} \Rightarrow C_{vu} \dot{\gamma} = \sum_{g=1}^G \sum_{h=1}^H \dot{a}_{gh}(\tau) \int \dot{u}'_r \dot{u}'_g d\xi \int \dot{v}'_s \dot{v}'_h d\eta$$

$$ap_{\tau 8} \Rightarrow N_{LCvw} \dot{\gamma} = \sum_{o=1}^O \sum_{p=1}^P q_{op}(\tau) \sum_{\alpha_1=1}^{O_1} \sum_{\beta_1=1}^{P_1} \dot{q}_{\alpha_1 \beta_1}(\tau) \int \dot{u}'_r \dot{\phi}'_{\alpha_1} \dot{\phi}'_{\beta_1} d\xi \int \dot{v}'_s \dot{\psi}'_p \dot{\psi}'_{p_1} d\eta$$

$$ap_{\tau 9} \Rightarrow C_{vv} \dot{\gamma} = \sum_{f=1}^F \sum_{d=1}^D \dot{b}_{fd}(\tau) \int \dot{u}'_r \dot{u}'_f d\xi \int \dot{v}'_s \dot{v}'_d d\eta$$

$$ap_{\tau 0} \Rightarrow C_{vu} \dot{\gamma} = \sum_{g=1}^G \sum_{h=1}^H \dot{a}_{gh}(\tau) \int \dot{u}'_r \dot{u}'_g d\xi \int \dot{v}'_s \dot{v}'_h d\eta$$

$$ap_{\tau 1} \Rightarrow N_{LCvw} \dot{\gamma} = \sum_{\alpha_1=1}^{O_1} \sum_{\beta_1=1}^{P_1} q_{\alpha_1 \beta_1}(\tau) \sum_{o=1}^O \sum_{p=1}^P \dot{q}_{op}(\tau) \int \dot{u}'_r \dot{\phi}'_{\alpha_1} \dot{\phi}'_{\beta_1} d\xi \int \dot{v}'_s \dot{\psi}'_p \dot{\psi}'_{p_1} d\eta$$

$$ap_{\tau 2} \Rightarrow N_{LCvw} \dot{\gamma} = \sum_{o=1}^O \sum_{p=1}^P q_{op}(\tau) \sum_{\alpha_1=1}^{O_1} \sum_{\beta_1=1}^{P_1} \dot{q}_{\alpha_1 \beta_1}(\tau) \int \dot{u}'_r \dot{\phi}'_{\alpha_1} \dot{\phi}'_{\beta_1} d\xi \int \dot{v}'_s \dot{\psi}'_p \dot{\psi}'_{p_1} d\eta$$

$$ap_{\tau 3} \Rightarrow M_{ww} \dot{\gamma} = \sum_{o=1}^O \sum_{p=1}^P q_{op}(\tau) \int \dot{\phi}'_m \dot{\phi}'_o d\xi \int \dot{\psi}'_n \dot{\psi}'_p d\eta$$

$$ap_{\tau 4} \Rightarrow K_{ww} \dot{\gamma} = \sum_{o=1}^O \sum_{p=1}^P q_{op}(\tau) \int \dot{\phi}''_m \dot{\phi}''_o d\xi \int \dot{\psi}'_n \dot{\psi}'_p d\eta$$

$$ap_{\tau 5} \Rightarrow K_{ww} \dot{\gamma} = \sum_{o=1}^O \sum_{p=1}^P q_{op}(\tau) \int \dot{\phi}'_m \dot{\phi}'_o d\xi \int \dot{\psi}''_n \dot{\psi}''_p d\eta$$

$$ap_{\tau 6} \Rightarrow K_{ww} \dot{\gamma} = \sum_{o=1}^O \sum_{p=1}^P q_{op}(\tau) \int \dot{\phi}''_m \dot{\phi}''_o d\xi \int \dot{\psi}''_n \dot{\psi}''_p d\eta$$



$$ap\tau v \Rightarrow Kww\tau = \sum_{o=1}^O \sum_{p=1}^P q_{op}(\tau) \int \phi_m \phi_o'' d\xi \int \psi_n'' \psi_p d\eta$$

$$ap\tau \wedge \Rightarrow Kww\delta = \sum_{o=1}^O \sum_{p=1}^P q_{op}(\tau) \int \phi_m' \phi_o' d\xi \int \psi_n' \psi_p' d\eta$$

$$ap\tau \epsilon \Rightarrow NLwu1 = \sum_{o=1}^O \sum_{p=1}^P q_{op}(\tau) \sum_{g=1}^G \sum_{h=1}^H a_{gh}(\tau) \int \phi_m' \phi_o' u_g' d\xi \int \psi_n \psi_p v_h d\eta$$

$$ap\tau \circ \Rightarrow NLww1 = \sum_{o=1}^O \sum_{p=1}^P q_{op}(\tau) \sum_{o_1=1}^{O_1} \sum_{p_1=1}^{P_1} q_{o_1 p_1}(\tau) \sum_{o_r=1}^{O_r} \sum_{p_r=1}^{P_r} q_{o_r p_r}(\tau) \int \phi_m' \phi_o' \phi_{o_1}' \phi_{o_r}' d\xi \int \psi_n \psi_p \psi_{p_1}' \psi_{p_r}' d\eta$$

$$ap\tau \vee \Rightarrow NLww1 = \sum_{o=1}^O \sum_{p=1}^P q_{op}(\tau) \sum_{f=1}^F \sum_{d=1}^D b_{fd}(\tau) \int \phi_m \phi_o u_f d\xi \int \psi_n' \psi_p' v_d' d\eta$$

$$ap\tau \tau \Rightarrow NLww\tau = \sum_{o=1}^O \sum_{p=1}^P q_{op}(\tau) \sum_{o_1=1}^{O_1} \sum_{p_1=1}^{P_1} q_{o_1 p_1}(\tau) \sum_{o_r=1}^{O_r} \sum_{p_r=1}^{P_r} q_{o_r p_r}(\tau) \int \phi_m \phi_o \phi_{o_1} \phi_{o_r} d\xi \int \psi_n' \psi_p' \psi_{p_1}' \psi_{p_r}' d\eta$$

$$ap\tau \tau \Rightarrow NLwwv = \sum_{o=1}^O \sum_{p=1}^P q_{op}(\tau) \sum_{f=1}^F \sum_{d=1}^D b_{fd}(\tau) \int \phi_m' \phi_o' u_f d\xi \int \psi_n \psi_p v_d' d\eta$$

$$ap\tau \epsilon \Rightarrow NLwu\tau = \sum_{o_r=1}^{O_r} \sum_{p_r=1}^{P_r} q_{o_r p_r}(\tau) \sum_{g=1}^G \sum_{h=1}^H a_{gh}(\tau) \int \phi_m \phi_{o_r} u_g' d\xi \int \psi_n' \psi_{p_r}' v_h d\eta$$

$$ap\tau \delta \Rightarrow NLww\tau = \sum_{o_r=1}^{O_r} \sum_{p_r=1}^{P_r} q_{o_r p_r}(\tau) \sum_{o=1}^O \sum_{p=1}^P q_{op}(\tau) \sum_{o_1=1}^{O_1} \sum_{p_1=1}^{P_1} q_{o_1 p_1}(\tau) \int \phi_m \phi_{o_r} \phi_o' \phi_{o_1}' d\xi \int \psi_n' \psi_p' \psi_{p_1}' \psi_{p_r}' d\eta$$

$$ap\tau \epsilon \Rightarrow NLww\tau = \sum_{o=1}^O \sum_{p=1}^P q_{op}(\tau) \sum_{o_1=1}^{O_1} \sum_{p_1=1}^{P_1} q_{o_1 p_1}(\tau) \sum_{o_r=1}^{O_r} \sum_{p_r=1}^{P_r} q_{o_r p_r}(\tau) \int \phi_m' \phi_o' \phi_{o_1} \phi_{o_r} d\xi \int \psi_n \psi_p \psi_{p_1}' \psi_{p_r}' d\eta$$

$$ap\tau v \Rightarrow Fw = \sum_{o=1}^O \sum_{p=1}^P q_{op}(\tau) \int \phi_o' \phi_m d\xi \int \psi_p \psi_n d\eta$$

$$ap\tau \wedge \Rightarrow Cw = \sum_{o=1}^O \sum_{p=1}^P q_{op}(\tau) \int \phi_o \phi_m d\xi \int \psi_p \psi_n d\eta$$

$$ap\tau \epsilon \Rightarrow CWW1 = \sum_{o=1}^O \sum_{p=1}^P q_{op}(\tau) \int \phi_m'' \phi_o'' d\xi \int \psi_n \psi_p d\eta$$

$$ap\tau \circ \Rightarrow CWW\tau = \sum_{o=1}^O \sum_{p=1}^P q_{op}(\tau) \int \phi_m \phi_o d\xi \int \psi_n'' \psi_p'' d\eta$$

$$ap\tau \vee \Rightarrow CWW\tau = \sum_{o=1}^O \sum_{p=1}^P q_{op}(\tau) \int \phi_m'' \phi_o d\xi \int \psi_n \psi_p'' d\eta$$

$$ap\tau \tau \Rightarrow CWW\tau = \sum_{o=1}^O \sum_{p=1}^P q_{op}(\tau) \int \phi_m \phi_o'' d\xi \int \psi_n'' \psi_p d\eta$$

$$ap\tau \tau \Rightarrow CWW\delta = \sum_{o=1}^O \sum_{p=1}^P q_{op}(\tau) \int \phi_m' \phi_o' d\xi \int \psi_n' \psi_p' d\eta$$

$$ap\delta\epsilon \Rightarrow NLCwuvq = \sum_{o=1}^O \sum_{p=1}^P \dot{q}_{op}(\tau) \sum_{g=1}^G \sum_{h=1}^H a_{gh}(\tau) \int \dot{\phi}'_m \dot{\phi}'_o u'_g d\xi \int \dot{\psi}'_n \dot{\psi}'_p v'_h d\eta$$

$$ap\delta\delta \Rightarrow NLCwuv\alpha = \sum_{o=1}^O \sum_{p=1}^P \dot{q}_{op}(\tau) \sum_{g=1}^G \sum_{h=1}^H \dot{a}_{gh}(\tau) \int \dot{\phi}'_m \dot{\phi}'_o u'_g d\xi \int \dot{\psi}'_n \dot{\psi}'_p v'_h d\eta$$

$$ap\delta\epsilon \Rightarrow NLCww\gamma = \sum_{o=1}^O \sum_{p=1}^P \dot{q}_{op}(\tau) \sum_{o_1=1}^{O_1} \sum_{p_1=1}^{P_1} q_{o_1 p_1}(\tau) \sum_{o_r=1}^{O_r} \sum_{p_r=1}^{P_r} \dot{q}_{o_r p_r}(\tau) \int \dot{\phi}'_m \dot{\phi}'_o \dot{\phi}'_{o_1} \dot{\phi}'_{o_r} d\xi \int \dot{\psi}'_n \dot{\psi}'_p \dot{\psi}'_{p_1} \dot{\psi}'_{p_r} d\eta$$

$$ap\delta\nu \Rightarrow NLCwv\gamma q = \sum_{o_1=1}^{O_1} \sum_{p_1=1}^{P_1} \dot{q}_{o_1 p_1}(\tau) \sum_{f=1}^F \sum_{d=1}^D b_{fd}(\tau) \int \dot{\phi}'_m \dot{\phi}'_{o_1} u'_f d\xi \int \dot{\psi}'_n \dot{\psi}'_{p_1} v'_d d\eta$$

$$ap\delta\lambda \Rightarrow NLCwv\gamma b = \sum_{o=1}^O \sum_{p=1}^P \dot{q}_{op}(\tau) \sum_{f=1}^F \sum_{d=1}^D \dot{b}_{fd}(\tau) \int \dot{\phi}'_m \dot{\phi}'_o u'_f d\xi \int \dot{\psi}'_n \dot{\psi}'_p v'_d d\eta$$

$$ap\delta\epsilon \Rightarrow NLCww\gamma\epsilon = \sum_{o=1}^O \sum_{p=1}^P \dot{q}_{op}(\tau) \sum_{o_1=1}^{O_1} \sum_{p_1=1}^{P_1} q_{o_1 p_1}(\tau) \sum_{o_r=1}^{O_r} \sum_{p_r=1}^{P_r} \dot{q}_{o_r p_r}(\tau) \int \dot{\phi}'_m \dot{\phi}'_o \dot{\phi}'_{o_1} \dot{\phi}'_{o_r} d\xi \int \dot{\psi}'_n \dot{\psi}'_p \dot{\psi}'_{p_1} \dot{\psi}'_{p_r} d\eta$$

$$ap\epsilon\circ \Rightarrow NLCwuvq = \sum_{o=1}^O \sum_{p=1}^P \dot{q}_{op}(\tau) \sum_{g=1}^G \sum_{h=1}^H a_{gh}(\tau) \int \dot{\phi}'_m \dot{\phi}'_o u'_g d\xi \int \dot{\psi}'_n \dot{\psi}'_p v'_h d\eta$$

$$ap\epsilon\gamma \Rightarrow NLCwv\gamma b = \sum_{o=1}^O \sum_{p=1}^P \dot{q}_{op}(\tau) \sum_{f=1}^F \sum_{d=1}^D \dot{b}_{fd}(\tau) \int \dot{\phi}'_m \dot{\phi}'_o u'_f d\xi \int \dot{\psi}'_n \dot{\psi}'_p v'_d d\eta$$

$$ap\epsilon\epsilon \Rightarrow NLCww\epsilon = \sum_{o=1}^O \sum_{p=1}^P \dot{q}_{op}(\tau) \sum_{o_1=1}^{O_1} \sum_{p_1=1}^{P_1} q_{o_1 p_1}(\tau) \sum_{o_r=1}^{O_r} \sum_{p_r=1}^{P_r} \dot{q}_{o_r p_r}(\tau) \int \dot{\phi}'_m \dot{\phi}'_o \dot{\phi}'_{o_1} \dot{\phi}'_{o_r} d\xi \int \dot{\psi}'_n \dot{\psi}'_p \dot{\psi}'_{p_1} \dot{\psi}'_{p_r} d\eta$$

$$ap\epsilon\epsilon \Rightarrow NLCww\epsilon = \sum_{o=1}^O \sum_{p=1}^P \dot{q}_{op}(\tau) \sum_{o_1=1}^{O_1} \sum_{p_1=1}^{P_1} q_{o_1 p_1}(\tau) \sum_{o_r=1}^{O_r} \sum_{p_r=1}^{P_r} \dot{q}_{o_r p_r}(\tau) \int \dot{\phi}'_m \dot{\phi}'_o \dot{\phi}'_{o_1} \dot{\phi}'_{o_r} d\xi \int \dot{\psi}'_n \dot{\psi}'_p \dot{\psi}'_{p_1} \dot{\psi}'_{p_r} d\eta$$

$$ap\epsilon\epsilon \Rightarrow NLCwv\gamma q = \sum_{o=1}^O \sum_{p=1}^P \dot{q}_{op}(\tau) \sum_{f=1}^F \sum_{d=1}^D b_{fd}(\tau) \int \dot{\phi}'_m \dot{\phi}'_o u'_f d\xi \int \dot{\psi}'_n \dot{\psi}'_p v'_d d\eta$$

$$ap\epsilon\delta \Rightarrow NLCwuv\alpha = \sum_{o=1}^O \sum_{p=1}^P \dot{q}_{op}(\tau) \sum_{g=1}^G \sum_{h=1}^H \dot{a}_{gh}(\tau) \int \dot{\phi}'_m \dot{\phi}'_o u'_g d\xi \int \dot{\psi}'_n \dot{\psi}'_p v'_h d\eta$$

$$ap\epsilon\epsilon \Rightarrow NLCww\epsilon = \sum_{o=1}^O \sum_{p=1}^P \dot{q}_{op}(\tau) \sum_{o_1=1}^{O_1} \sum_{p_1=1}^{P_1} q_{o_1 p_1}(\tau) \sum_{o_r=1}^{O_r} \sum_{p_r=1}^{P_r} \dot{q}_{o_r p_r}(\tau) \int \dot{\phi}'_m \dot{\phi}'_o \dot{\phi}'_{o_1} \dot{\phi}'_{o_r} d\xi \int \dot{\psi}'_n \dot{\psi}'_p \dot{\psi}'_{p_1} \dot{\psi}'_{p_r} d\eta$$

$$ap\epsilon\nu \Rightarrow NLCww\delta = \sum_{o=1}^O \sum_{p=1}^P \dot{q}_{op}(\tau) \sum_{o_1=1}^{O_1} \sum_{p_1=1}^{P_1} q_{o_1 p_1}(\tau) \sum_{o_r=1}^{O_r} \sum_{p_r=1}^{P_r} \dot{q}_{o_r p_r}(\tau) \int \dot{\phi}'_m \dot{\phi}'_o \dot{\phi}'_{o_1} \dot{\phi}'_{o_r} d\xi \int \dot{\psi}'_n \dot{\psi}'_p \dot{\psi}'_{p_1} \dot{\psi}'_{p_r} d\eta$$

$$ap\epsilon\lambda \Rightarrow NLCwv\gamma q = \sum_{o=1}^O \sum_{p=1}^P \dot{q}_{op}(\tau) \sum_{f=1}^F \sum_{d=1}^D b_{fd}(\tau) \int \dot{\phi}'_m \dot{\phi}'_o u'_f d\xi \int \dot{\psi}'_n \dot{\psi}'_p v'_d d\eta$$

$$ap\epsilon\epsilon \Rightarrow NLCwv\gamma q = \sum_{o=1}^O \sum_{p=1}^P \dot{q}_{op}(\tau) \sum_{f=1}^F \sum_{d=1}^D b_{fd}(\tau) \int \dot{\phi}'_m \dot{\phi}'_o u'_f d\xi \int \dot{\psi}'_n \dot{\psi}'_p v'_d d\eta$$

$$ap\nu\circ \Rightarrow NLCwuvq = \sum_{o=1}^O \sum_{p=1}^P \dot{q}_{op}(\tau) \sum_{g=1}^G \sum_{h=1}^H a_{gh}(\tau) \int \dot{\phi}'_m \dot{\phi}'_o u'_g d\xi \int \dot{\psi}'_n \dot{\psi}'_p v'_h d\eta$$

$$apv\lambda \Rightarrow NLCwv\tau q = \sum_{o=1}^O \sum_{p=1}^P \dot{q}_{op}(\tau) \sum_{g=1}^G \sum_{h=1}^H \dot{a}_{gh}(\tau) \int \phi'_m \phi'_o u'_g d\xi \int \psi'_n \psi'_p v'_h d\eta$$

$$apv\tau \Rightarrow NLCwv\tau b = \sum_{o=1}^O \sum_{p=1}^P \dot{q}_{op}(\tau) \sum_{f=1}^F \sum_{d=1}^D \dot{b}_{fd}(\tau) \int \phi'_m \phi'_o u'_f d\xi \int \psi'_n \psi'_p v'_d d\eta$$

$$apv\tau \Rightarrow NLCwv\tau b = \sum_{o=1}^O \sum_{p=1}^P \dot{q}_{op}(\tau) \sum_{f=1}^F \sum_{d=1}^D \dot{b}_{fd}(\tau) \int \phi'_m \phi'_o u'_f d\xi \int \psi'_n \psi'_p v'_d d\eta$$

$$apv\tau \Rightarrow NLCwv\tau a = \sum_{o=1}^O \sum_{p=1}^P \dot{q}_{op}(\tau) \sum_{g=1}^G \sum_{h=1}^H \dot{a}_{gh}(\tau) \int \phi'_m \phi'_o u'_g d\xi \int \psi'_n \psi'_p v'_h d\eta$$

$$apv\delta \Rightarrow NLCwv\tau a = \sum_{o=1}^O \sum_{p=1}^P \dot{q}_{op}(\tau) \sum_{g=1}^G \sum_{h=1}^H \dot{a}_{gh}(\tau) \int \phi'_m \phi'_o u'_g d\xi \int \psi'_n \psi'_p v'_h d\eta$$

$$apv\epsilon \Rightarrow NLCwv\delta = \sum_{o=1}^O \sum_{p=1}^P \dot{q}_{op}(\tau) \sum_{o_1=1}^{O_1} \sum_{p_1=1}^{P_1} \dot{q}_{o_1 p_1}(\tau) \sum_{o_r=1}^{O_r} \sum_{p_r=1}^{P_r} \dot{q}_{o_r p_r}(\tau) \int \phi'_m \phi'_o \phi'_{o_1} \phi'_{o_r} d\xi \int \psi'_n \psi'_p \psi'_{p_1} \psi'_{p_r} d\eta$$

$$apv\lambda \Rightarrow NLCwv\lambda = \sum_{o_1=1}^{O_1} \sum_{p_1=1}^{P_1} \dot{q}_{o_1 p_1}(\tau) \sum_{o=1}^O \sum_{p=1}^P \dot{q}_{op}(\tau) \sum_{o_r=1}^{O_r} \sum_{p_r=1}^{P_r} \dot{q}_{o_r p_r}(\tau) \int \phi'_m \phi'_o \phi'_{o_1} \phi'_{o_r} d\xi \int \psi'_n \psi'_{p_1} \psi'_p \psi'_{p_r} d\eta$$

$$apv\lambda \Rightarrow NLCwv\epsilon = \frac{a}{b} \sum_{o=1}^O \sum_{p=1}^P \dot{q}_{op}(\tau) \sum_{o_1=1}^{O_1} \sum_{p_1=1}^{P_1} \dot{q}_{o_1 p_1}(\tau) \sum_{o_r=1}^{O_r} \sum_{p_r=1}^{P_r} \dot{q}_{o_r p_r}(\tau) \int \phi'_m \phi'_o \phi'_{o_1} \phi'_{o_r} d\xi \int \psi'_n \psi'_p \psi'_{p_1} \psi'_{p_r} d\eta$$

$$apv\lambda \Rightarrow NLCwv\lambda = \sum_{o_1=1}^{O_1} \sum_{p_1=1}^{P_1} \dot{q}_{o_1 p_1}(\tau) \sum_{o=1}^O \sum_{p=1}^P \dot{q}_{op}(\tau) \sum_{o_r=1}^{O_r} \sum_{p_r=1}^{P_r} \dot{q}_{o_r p_r}(\tau) \int \phi'_m \phi'_o \phi'_{o_1} \phi'_{o_r} d\xi \int \psi'_n \psi'_{p_1} \psi'_p \psi'_{p_r} d\eta$$