نشریه روش‌های عددی در مهندسی، سال ۴۱، شماره ۱، تابستان ۱۴۰۱، ص. ۱۵۴-۱۳۵

مقاله پژوهشی

تحلیل کمانش تیر تیموشنکو با مقطع متغیر از جنس تابعی تحت بار محوری گسترده و متمرکز به روش تربیع دیفرانسیل

شاهین نمازی و منصور محی الدین قمشه‌ای*

گروه مهندسی مکانیک، واحد کرج - دانشگاه آزاد اسلامی، کرج، ایران

(دریافت مقاله: ۱۴۰۰/۱/۲۰ - دریافت نسخه نهایی: ۱۴۰۰/۸/۹)

چکیده– این مقاله به تحلیل کمانش تیرهای گوه‌ای با پهنای ثابت و ضخامت متغیر و ساخته شده از مواد مدرج تابعی دو بعدی پرداخته است. فرض بر آنست که تیر از ترکیب فلز با سرامیک ساخته شده باشد، بطوریکه کسر حجمی هر یک از آنها در راستای طول تیر و همچنین در راستای ضخامت آن بر اساس توابع توانی تغییر کند. همچنین فرض می‌شود که تیر بطور همزمان تحت اثر نیروهای محوری متمرکز و گسترده قرار دارد. معادلات حاکم و شرایط مرزی با استفاده از اصل انرژی پتانسیل کمینه استخراج گردیده و سپس با استفاده از روش تربیع دیفرانسیلی برای تیری با شرایط مرزی یک سر گیردار حل شده‌اند. پس از تایید همگرایی و صحت تحلیل ارائه شده، تأثیر مشخصات گوناگون بر روی مقدار بار بحرانی تیر در هر دو حالت تیر تحت بار متمرکز و تیر تحت بار گسترده بر واحد طول بررسی شده‌اند که از آن جمله می‌توان به مشخصات هندسی تیر، ایندکس‌های توانی در تغییرات خواص در هر دو راستای طول و ضخامت و همچنین چگونگی تغییرات ضخامت تیر اشاره کرد. تحلیل کمانش تیر در صورت اعمال همزمان بارهای نقطه‌ای و گسترده نیز مورد بررسی قرار گرفته است. در تحلیل کمانش تیر تحت بار گسترده سه الگوی توزیع برای بار در نظر گرفته شده‌اند که شامل توزیع خطی، درجه دو و نمایی است. نتایج این تحقیق نشان می‌دهند که در بین الگوهای بررسی شده برای توزیع بار گسترده بیشترین مقدار بار بحرانی متعلق به توزیع خطی است و کمترین مقدار بار بحرانی متعلق به توزیع نمایی بار است.

واژه‌های کلیدی: کمانش، بار گسترده، تیر گوه‌ای، مواد مدرج تابعی دو بعدی.

Buckling Analysis of FGM Timoshenko Beam with Variable Thickness under Concentrated and Distributed Axial loads Using DQM

Sh. Namazi and M. Mohieddin Ghomshei *

Department of Mechanical Engineering, Karaj Branch-Islamic Azad University, Karaj, Iran.

Abstract: ***In this article, mechanical buckling analysis of tapered beams having constant width and variable thickness, made of two-dimensional functionally graded materials is studied. The beam is assumed to be made of metal and ceramic, where their volume fractions vary in both longitudinal and thickness directions based on the power law. The beam is generally subjected to***

* : مسئول مکاتبات، پست الکترونیکی: ghomshei@kiau.ac.ir

[DOR: 20.1001.1.22287698.1401.41.1.5.7]

[DOI: 10.47176/jcme.41.1.8931]

combined concentrated and distributed axial loads. The set of governing equations are derived using the Principle of Minimum total Potential Energy (PMPE), and are solved numerically using Differential Quadrature Method (DQM) for clamped-free boundary conditions. Convergence and accuracy of the presented solution are confirmed for both cases of concentrated and distributed axial loads. The effects of different parameters on the critical buckling load of the beam for both load cases are studied including geometrical parameters, gradation indices in longitudinal and thickness directions, and variation of thickness. Also buckling analysis of the beam under a combination of concentrated load and distributed axial loads of linear, quadratic and exponential types are investigated. Numerical results show that the highest values of the critical buckling load belong to the linear distributed load, and the lowest value is owned by exponential load.

Keywords: ***Buckling, Distributed load, Tapered beam, Two-dimensional functionally graded materials.***

[DOR: 20.1001.1.22287698.1401.41.1.5.7]

[DOI: 10.47176/jcme.41.1.8931]

فهرست علائم

A	سطح مقطع تیر	$Q(x)$	نیروی محوری ایجاد شده در اثر بار گسترده محوری
$[A]$	ماتریس ضرایب وزنی متناظر برای مشتق اول	Q_{xz}	نیروی برشی
$[B]$	ماتریس ضرایب وزنی متناظر برای مشتق دوم	q	شدت بار گسترده محوری
b	پهنای تیر	$S(x)$	تغییرات بار گسترده محوری
$E(x,z)$	مدول الاستیسیته دو بعدی تیر	U	انرژی پتانسیل
E_m	مدول الاستیسیته فلز	u	تغییر مکان‌های محوری در هر نقطه روی محور خنثی
E_c	مدول الاستیسیته سرامیک	V_c	کسر حجمی سرامیک
$G(x,z)$	مدول برشی	V_m	کسر حجمی فلز
$h(x)$	ضخامت متغیر تیر	$\{v\}$	بردار جابجایی کل
$[I]$	ماتریس همانی	W	کار نیروهای خارجی
k	ضریب تصحیح تنش برشی	w	تغییر مکان‌های عرضی در هر نقطه روی محور خنثی
L	طول تیر	γ_{ij}	کرنش‌های برشی
M_{xx}	گشتاور خمشی	δ	نماد تغییرات یا واریاسیون
N_{xx}	نیروی محوری	ε_{ij}	کرنش‌های عمودی
P	نیروی محوری فشاری ثابت	ν	نسبت پواسون
P_{cr}	بار بحرانی	σ_{xx}	تنش محوری
P^*_{cr}	بار بحرانی بی بعد	σ_{xz}	تنش برشی
p	ایندکس نمایی پروفیل تغییرات خواص	φ	چرخش مقطع عرضی

۱- مقدمه

با توجه به کاربرد بالای تیرها و ستون‌های با سطح مقطع متغیر محققین بسیاری روی تحلیل کمانش این نوع از سازه‌ها متمرکز شدند. بگسی با استفاده از روش اجزاء محدود به تحلیل کمانش تیرها، محورها و قاب‌های چند تکیه‌گاهی با سطح مقطع متغیر و تکیه‌گاه‌های صلب و یا الاستیک پرداخت [۱]. تمرکز اصلی او در این تحقیق نشان دادن مزایای روش حل استفاده شده توسط او بود. گاوس و آنتمن [۲] به تحلیل کمانش حرارتی غیرخطی تیرها و ورق‌های دایروی با ضخامت غیریکنواخت پرداختند [۲]. تاکید اصلی آنها در این پژوهش بر میزان تأثیر فرضیات و معادلات ساختاری در نظر گرفته شده روی مقدار بار بحرانی تیرها و ورق‌های دایروی بود. هووانگ و همکاران روی تحلیل کمانش تیرهای ساخته شده از مواد مدرج تابعی با سطح مقطع متغیر متمرکز شدند [۳]. آنها برای شرایط مرزی

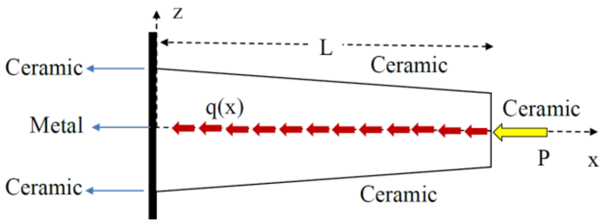
[DOR: 20.1001.1.22287698.1401.41.1.5.7]

[DOI: 10.47176/jcme.41.1.8931]

گوناگون تأثیر چگونگی تغییرات سطح مقطع تیر روی مقدار بار بحرانی را بررسی کردند. با استفاده از روش اجزا محدود، راجاسکاران و خانیکی به تحلیل خمش، کمانش و ارتعاشات آزاد تیرهای گوه‌ای در ابعاد میکرو و نانو با ضخامت و پهنای متغیر پرداختند [۴]. آنها تأثیر چگونگی تغییرات سطح مقطع را روی خیز استاتیکی، بار بحرانی کمانش و فرکانس‌های طبیعی بررسی کردند و نشان دادند که تغییرات سطح مقطع اثرات قابل توجهی روی رفتار مکانیکی تیر دارد. با در نظر گرفتن قیودی روی بار بحرانی، شامل حد تغییر شکل استاتیکی و حد تنش بیشینه، اوزباساران و ییلماز تیرهای گوه‌ای با سطح مقطع I شکل را بهینه‌سازی کردند [۵]. آنها با استفاده از روش اجزا محدود صحت نتایج خود را اثبات کردند و در چهار حالت مختلف از بارگذاری و شرایط مرزی شکل بهینه تیر را استخراج کردند. از طریق انجام تست‌های آزمایشگاهی، تانکووا و همکاران مقادیر بار بحرانی را در کمانش عرضی-پیچشی تیرها و ستون‌های گوه‌ای با سطح مقطع به شکل I و دارای تنش پسماند را بررسی کردند [۶]. یکی از اهداف آنها تهیه نتایجی جامع از تحقیقات سایر محققین بود تا بتوانند دقت مدل‌های ارائه شده توسط خود را از طریق نتایج آزمایشگاهی آنها بررسی کنند.

با توجه به وجود بارهای محوری فشاری گسترده در کنار بارهای فشاری متمرکز، بسیاری از محققین در مورد کمانش تیرها و ستون‌ها تحت بارهای ترکیبی متمرکز و گسترده تحقیق کردند. با فرض ثابت بودن حجم تیر، وانگ و همکاران اقدام به بهینه کردن چگونگی تغییرات سطح مقطع در تیرهای گوه‌ای کردند تا بتوان بار بحرانی تیر را تا حد ممکن افزایش داد [۷]. آنها تیر را به شکل همزمان تحت بار فشاری متمرکز و بار فشاری گسترده فرض کردند و شرایط مرزی در دو انتهای تیر را در حالت تیر یک سر درگیر و تیر با تکیه‌گاه‌های ساده در نظر گرفتند. لی با استفاده از توابع بسل یک حل دقیق را برای کمانش ستون‌های با سطح مقطع متغیر تحت بارهای متمرکز و گسترده ارائه کرد [۸]. او دوازده مساله مجزا را در بخش نتایج عددی مقاله خود بررسی کرد که شامل مسائلی مهم در مهندسی هستند. دربندی و همکاران یک حل دقیق و تحلیلی برای کمانش ستون‌های با سطح مقطع متغیر تحت بارهای متمرکز و گسترده ارائه کردند [۹]. آنها از طریق مقایسه پاسخ‌های خود با نتایج گزارش شده توسط سایر محققین دقت بالای تحلیل خود را نشان دادند. رابینسون و آدالی با استفاده از روش رایلی-ریتز اقدام به تحلیل کمانش نانو لوله‌های کربنی تحت بارهای محوری متمرکز و گسترده کردند [۱۰]. آنها از طریق ترسیم کانتورهای پایداری برای شرایط مرزی مختلف نواحی پایدار و ناپایدار را برای اعمال همزمان بارهای متمرکز و گسترده مشخص کردند. کاراماناکلی و آیدوگلو با استفاده از روش ریتز به تحلیل کمانش تیرهای کامپوزیتی تحت بارهای محوری گسترده با الگوهای توزیع مختلف پرداختند [۱۱]. آنها برای شرایط مرزی مختلف مقدار بار بحرانی متناظر با الگوهای توزیع بار را با یکدیگر مقایسه کردند. آنها همچنین تأثیر نسبت طول به ضخامت تیر و زاویه الیاف کامپوزیتی را روی مقدار بار بحرانی بررسی کردند. ملاییاری و همکاران با مدل‌سازی تیر بر مبنای تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم اقدام به تحلیل کمانش و پایداری تیرهای ساخته شده از مواد مدرج تابعی تحت بارگذاری محوری گسترده کردند [۱۲]. آنها شش الگوی متفاوت را برای توزیع نیروی محوری گسترده روی تیر در نظر گرفتند و همزمان با مقایسه این الگوها با یکدیگر، تأثیر توان پروفیل در تغییرات خواص تیر در راستای ضخامت و همچنین شرایط مرزی در دو انتهای تیر را روی مقدار بار بحرانی بررسی کردند.

با توجه به این که مواد مدرج تابعی در حالت دو بعدی آزادی عملی بیشتری را در اختیار طراح قرار می‌دهند تا توزیع مواد را بیش از پیش در اختیار داشته باشد، در سال‌های اخیر پژوهش‌های قابل توجهی در مورد کمانش تیرهای ساخته شده از مواد مدرج تابعی دو بعدی انجام شده است. با استفاده از تئوری تیر تیموشنکو، سیسمک به تحلیل کمانش تیرهای ساخته شده از مواد مدرج تابعی دو بعدی برای شرایط مرزی



شکل ۱- هندسه و بارگذاری تیر

گوناگون پرداخته است [۱۳]. او روی تأثیر چگونگی تغییرات خواص مکانیکی و همچنین تغییر شکل برشی در نظر گرفته شده در تئوری تیر تیموشنکو روی مقدار بار بحرانی پرداخته است. تحلیل ارتعاشات غیرخطی و رفتار پساکمانشی میکروتیرهای ساخته شده از مواد مدرج تابعی دو بعدی توسط چن و همکاران مورد بررسی قرار گرفت [۱۴]. آنها با در نظر گرفتن تغییرات خواص در راستای طولی و همچنین راستای ضخامت تیر اقدام به حل معادلات غیرخطی برای شرایط مرزی مختلف کردند. راجاسکاران و خانیکی با استفاده از روش اجزا محدود بر تحلیل کمانش و ارتعاشات تیرهای با سطح مقطع متغیر پله‌دار ساخته شده از مواد مدرج تابعی دو بعدی متمرکز شدند [۱۶ و ۱۵]. آنها طی مثال‌های مختلف و برای شرایط مرزی گوناگون مقدار بار بحرانی و فرکانس‌های طبیعی را برای این نوع از تیرها گزارش کردند.

با توجه به مروری که بر تحقیقات انجام شده صورت گرفت و با هدف تکمیل پژوهش‌های انجام شده در این زمینه، در این تحقیق به تحلیل کمانش تیر یک سر درگیر ساخته شده از مواد مدرج تابعی دو بعدی با سطح مقطع مستطیلی با پهنای ثابت و ضخامت متغیر تحت اعمال همزمان بار متمرکز و بار گسترده پرداخته می‌شود. در بخش دوم با استفاده از تئوری تیر تیموشنکو و با فرض این که خواص به شکل همزمان در راستای طول و ضخامت تیر بر اساس توابع توانی تغییر می‌کنند مدل‌سازی می‌شود. بار گسترده وارد شده بر تیر نیز بر اساس یکی از سه الگوی خطی، درجه دو یا نمایی، تغیر می‌کند. معادلات حاکم و شرایط مرزی با استفاده از اصل انرژی پتانسیل کمینه استخراج می‌شوند. در بخش سوم روش تربیع دیفرانسیلی[۱] به شکلی مختصر معرفی می‌شود و با استفاده از آن معادلات حاکم به‌دست آمده در بخش چهارم حل می‌شوند. بخش پنجم به ارائه نتایج عددی، شامل بررسی همگرایی، راستی آزمائی و مطالعات پارامتری پرداخته است، و نهایتاً در بخش آخر جمع‌بندی و پیشنهادات جهت تحقیقات آتی ارائه شده است.

۲- مدل‌سازی ریاضی

۲-۱- پارامترهای هندسی و خواص مواد

همان‌گونه که در شکل (۱) نشان داده شده است، یک تیر یک سردرگیر با طول L، پهنای b و ضخامت متغیر h=h(x) تحت نیروی محوری فشاری ثابت P در انتهای آزاد خود و نیروی محوری فشاری گسترده q=q(x) در نظر گرفته شده است. مدول الاستیسیته تیر را می‌توان با رابطه زیر بیان کرد:

$$E(x,z) = E_m V_m + E_c V_c \quad (۱)$$

که در این رابطه E و V به‌ترتیب بیانگر مدول الاستیسیته و کسر حجمی مواد است و زیرنویس‌های m و c بیانگر خواص در فلز و سرامیک است. در این پژوهش تیر از جنس یک ماده مدرج تابعی با خواص همسانگرد در نظر گرفته می‌شود، لذا مدول برشی را می‌توان با تساوی زیر بیان کرد:

$$G(x,z) = \frac{E(x,z)}{۲(۱+\nu)} \quad (۲)$$

که در این رابطه ν بیانگر نسبت پوآسون است که معمولا به شکل ثابت درنظر گرفته می‌شود. با توجه به شکل (۱) و فرض توزیع دو بعدی مواد در طول و ضخامت تیر، می‌توان کسر حجمی فلز را به‌صورت زیر بیان کرد:

$$V_m(x,z)=\left(1-\frac{x}{L}\right)^m\left[1-\frac{2|z|}{h(x)}\right]^n \qquad (3)$$

که در این رابطه m و n دو مقدار ثابت هستند که چگونگی تغییرات خواص را در هر دو راستا نشان می‌دهند. بدیهی است که کسر حجمی سرامیک از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$V_c=1-V_m \qquad (4)$$

با ترکیب روابط (۱)، (۳) و (۴) می‌توان مدول الاستیسیته تیر را به شکل زیر بیان کرد:

$$E(x,z)=E_c+(E_m-E_c)\left(1-\frac{x}{L}\right)^m\left[1-\frac{2|z|}{h(x)}\right]^n \qquad (5)$$

۲-۲- روابط سینماتیکی و رفتاری

بر اساس تئوری تیر تیموشنکو، میدان جابجایی در تیر به شکل زیر است [۱۷]:

$$u_1(x,z)=u(x)-z\varphi(x),$$
$$u_2(x,z)=0 \qquad (6)$$
$$u_3(x,z)=w(x)$$

که در این رابطه u_1، u_2 و u_3 به‌ترتیب مولفه‌های جابجایی را در راستاهای x، y و z نشان می‌دهند. u بیانگر جابجایی طولی نقاط واقع بر تار خنثی تیر است و φ چرخش حول محور y را نشان می‌دهد. مولفه‌های کرنش از روابط زیر قابل محاسبه هستند [۱۸]:

$$\varepsilon_{xx}=\frac{\partial u_1}{\partial x},\quad \varepsilon_{yy}=\frac{\partial u_2}{\partial y},\quad \varepsilon_{zz}=\frac{\partial u_3}{\partial z},$$
$$\gamma_{xy}=\frac{\partial u_1}{\partial y}+\frac{\partial u_2}{\partial x},\quad \gamma_{xz}=\frac{\partial u_1}{\partial z}+\frac{\partial u_3}{\partial x},\quad \gamma_{yz}=\frac{\partial u_2}{\partial z}+\frac{\partial u_3}{\partial y} \qquad (7)$$

که در این رابطه ε_{ij} بیانگر کرنش‌های عمودی و γ_{ij} نشان‌دهنده کرنش‌های برشی هستند. با جایگذاری رابطه (۶) در معادله (۷) مولفه‌های کرنش به شکل زیر قابل بیان هستند:

$$\varepsilon_{xx}=\frac{du}{dx}-z\frac{d\varphi}{dx},\quad \varepsilon_{yy}=0,\quad \varepsilon_{zz}=0$$
$$\gamma_{xy}=0,\quad \gamma_{xz}=\frac{dw}{dx}-\varphi,\quad \gamma_{yz}=0 \qquad (8)$$

بر اساس قانون هوک و تئوری تیر تیموشنکو مولفه‌های تنش به شکل زیر محاسبه می‌شوند [۱۸]:

$$\sigma_{xx}=E\varepsilon_{xx},\ \sigma_{xz}=kG\gamma_{xz} \qquad (9)$$

که در این رابطه k ضریب تصحیح تنش برشی است که برای سطح مقطع مستطیلی از تساوی زیر به‌دست می‌آید [۳۰].

$$k=\pi^2/12\approx\frac{5}{6} \qquad (10)$$

جایگذاری رابطه (۸) در معادله (۹) منجر به رابطه زیر می‌شود:

$$\sigma_{xx}=E\left(\frac{du}{dx}-z\frac{d\varphi}{dx}\right),\quad \sigma_{xz}=kG\left(\frac{dw}{dx}-\varphi\right) \qquad (11)$$

۲-۳- استخراج معادلات تعادل و پایداری

بر اساس اصل انرژی پتانسیل کمینه معادلات حاکم و شرایط مرزی را می‌توان از رابطه زیر استخراج کرد [۱۹]:

$$\delta U-\delta W=0 \qquad (12)$$

که در این رابطه U و W به‌ترتیب بیانگر انرژی پتانسیل کرنشی و کار نیروهای خارجی هستند و δ نشان‌دهنده عملگر تغییرات یا واریاسیون است. تغییرات دیفرانسیلی انرژی پتانسیل کرنشی به شکل زیر است:

$$\delta U=\frac{1}{2}\iiint_V\left(\sigma_{xx}\delta\varepsilon_{xx}+\delta\sigma_{xx}\varepsilon_{xx}+\sigma_{xz}\delta\gamma_{xz}+\delta\sigma_{xz}\gamma_{xz}\right)dV \qquad (13)$$

با جایگزینی از معادله (۸) در (۱۳) و سپس انتگرال‌گیری روی ضخامت تیرخواهیم داشت:

$$\delta U=\int_0^L\left(N_{xx}\frac{d\delta u}{dx}-M_{xx}\frac{d\delta\varphi}{dx}+Q_{xz}\frac{d\delta w}{dx}-Q_{xz}\delta\varphi\right)dx \qquad (14)$$

که در این رابطه منتجه‌های تنش به‌صورت زیر تعریف شده‌اند:

$$N_{xx}=\iint_A\sigma_{xx}dA,\quad M_{xx}=\iint_A\sigma_{xx}z\,dA,\quad Q_{xz}=\iint_A\sigma_{xz}dA \qquad (15)$$

در این رابطه N_{xx}، M_{xx} و Q_{xz} به‌ترتیب بیانگر نیروی محوری، گشتاور خمشی و نیروی برشی در تیر هستند. اکنون با جایگذاری رابطه (۱۱) در معادله (۱۵) و انجام عملیات جبری لازمه، تساوی‌های زیر برای منتجه‌های تنش حاصل می‌شود:

$$
\begin{aligned}
N_{xx} &= R_0 \frac{du}{dx} - R_1 \frac{d\varphi}{dx},\\
M_{xx} &= R_1 \frac{du}{dx} - R_2 \frac{d\varphi}{dx},\\
Q_{xz} &= \alpha R_0 \left(\frac{dw}{dx} - \varphi \right)
\end{aligned}
\qquad (16)
$$

که در این رابطه:

$$
\begin{aligned}
&\alpha = \frac{k}{2(1+\nu)},\\
&R_0(x) = b\left[E_c + \frac{E_m - E_c}{n+1}\left(1-\frac{x}{L}\right)^m \right] h(x), \qquad R_1(x) = 0,\\
&R_2(x) = b\left[\frac{E_c}{12} + \frac{E_m - E_c}{2(n+1)(n+2)(n+3)}\left(1-\frac{x}{L}\right)^m \right] h^3(x)
\end{aligned}
\qquad (17)
$$

تغییرات کار انجام شده توسط نیروهای محوری فشاری ثابت P و گسترده q(x) به شکل زیر محاسبه می‌شود [۲۰]:

$$
\delta W = \int_0^L \left[P + Q(x) \right] \frac{dw}{dx} \frac{d\delta w}{dx} dx \qquad (18)
$$

که در این رابطه [۲۱]:

$$
Q(x) = \int_x^L q(\xi) d\xi \qquad (19)
$$

تابع Q (x) در واقع بیانگر نیروی محوری ایجاد شده در اثر بار گسترده محوری است. با تعریف متغیر بدون بعدی به شکل زیر:

$$
f(x) = \frac{q(x)}{q_0} \qquad (20)
$$

که در آن q_0 شدت بار گسترده محوری در نقطه x=۰ است، رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$
Q(x) = q_0 S(x) \qquad (21)
$$

که در این رابطه

$$
S(x) = \int_x^L f(\xi) d\xi \qquad (22)
$$

بر اساس رابطه (۲۰) مقدار تابع f(x) در نقطه x=۰ برابر با f(۰)= ۱ است و این تابع بدون بعد بیانگر چگونگی تغییرات بار گسترده محوری است که می‌تواند به شکل هر تابع دلخواهی باشد. در این پژوهش سه حالت در نظر گرفته می‌شوند که به‌صورت توابع خطی، سهموی و نمایی هستند:

$$
\begin{cases}
f(x) = 1 - \beta \dfrac{x}{L} & \text{Linear}\\[2mm]
f(x) = 1 - \beta \left(\dfrac{x}{L} \right)^2 & \text{Quaratic}\\[2mm]
f(x) = \exp\left(-\dfrac{\beta x}{L} \right) & \text{Exponential}
\end{cases}
\qquad (23)
$$

لازم به‌ذکر است که در رابطه (۲۳) $0 \le \beta \le 1$ ضریبی بدون بعد است که کنترل‌کننده نرخ تغییرات بار گسترده در راستای تیر است. با جایگذاری رابطه (۲۳) در رابطه (۲۲) معادلات زیر حاصل می‌شوند:

$$
\begin{cases}
S(x) = \dfrac{L}{2}\left(1-\dfrac{x}{L}\right)\left(2-\beta-\beta\dfrac{x}{L}\right) & \text{Linear}\\[2mm]
S(x) = L\left[1 - \dfrac{\beta}{3} - \dfrac{x}{L} + \dfrac{\beta}{3}\left(\dfrac{x}{L}\right)^3 \right] & \text{Quaratic}\\[2mm]
S(x) = \dfrac{L}{\beta}\left[\exp\left(-\dfrac{\beta x}{L}\right) - \exp(-\beta) \right] & \text{Exponential}
\end{cases}
\qquad (24)
$$

جایگذاری روابط (۱۴) و (۱۸) در معادله (۱۲) منجر به رابطه زیر می‌شود:

$$
\int_0^L \left\{ \begin{aligned} & N_{xx}\frac{d\delta u}{dx} - M_{xx}\frac{d\delta\varphi}{dx} + Q_{xz}\frac{d\delta w}{dx} - Q_{xz}\delta\varphi - \\ & \left[P + Q(x) \right]\frac{dw}{dx}\frac{d\delta w}{dx} \end{aligned} \right\} dx = 0 \qquad (25)
$$

با انتگرال‌گیری جز به جز نسبت به x از رابطه (۲۵) می‌توان رابطه زیر را به‌دست آورد:

$$
\left. \left\{ \begin{aligned} & N_{xx}\delta u - M_{xx}\delta\varphi + Q_{xz}\delta w - \\ & \left[P + Q(x) \right]\frac{dw}{dx}\delta w \end{aligned} \right\} \right|_{x=0}^{x=L} +
$$

$$
\int_0^L \left\{ \begin{aligned} & -\frac{dN_{xx}}{dx}\delta u + \frac{dM_{xx}}{dx}\delta\varphi - \frac{dQ_{xz}}{dx}\delta w - Q_{xz}\delta\varphi + \\ & \frac{d}{dx}\left\{ \left[P + Q(x) \right]\frac{dw}{dx} \right\}\delta w \end{aligned} \right\} dx = 0 \qquad (26)
$$

معادله (۲۶) به شکل زیر قابل ساده‌سازی است:

$$
\left. \left\langle \begin{aligned} & N_{xx}\delta u + \left\{ Q_{xz} - \left[P + Q(x) \right]\frac{dw}{dx} \right\}\delta w - \\ & M_{xx}\delta\varphi \end{aligned} \right\rangle \right|_{x=0}^{x=L} +
$$

$$
\int_0^L \left\{ \begin{aligned} & -\frac{dN_{xx}}{dx}\delta u - \\ & \left\langle \frac{dQ_{xz}}{dx}\delta w - \frac{d}{dx}\left\{ \left[P + Q(x) \right]\frac{dw}{dx} \right\} \right\rangle \delta w + \\ & \left(\frac{dM_{xx}}{dx} - Q_{xz} \right)\delta\varphi \end{aligned} \right\} dx = 0 \qquad (27)
$$

[DOR: 20.1001.1.22287698.1401.41.1.5.7]

[DOI: 10.47176/jcme.41.1.8931]

در نتیجه معادلات حاکم بر کمانش تیر را می‌توان به شکل زیر استخراج کرد:

$$\begin{aligned}&\frac{dN_{xx}}{dx}=0\\&\frac{dQ_{xz}}{dx}\delta w-\frac{d}{dx}\left\{\left[P+Q(x)\right]\frac{dw}{dx}\right\}=0\\&\frac{dM_{xx}}{dx}-Q_{xz}=0\end{aligned}\tag{۲۸}$$

و شرایط مرزی نیز به‌صورت زیر خواهند بود:

$$\begin{aligned}&\delta u=0 \quad \text{or} \quad N_{xx}=0,\\&\delta w=0 \quad \text{or} \quad Q_{xz}-\left[P+Q(x)\right]\frac{dw}{dx}=0,\\&\delta\varphi=0 \quad \text{or} \quad M_{xx}=0\end{aligned}\tag{۲۹}$$

جایگذاری رابطه (۱۶) در معادله (۲۸) منجر به رابطه زیر می‌شود:

$$\begin{aligned}&R_0(x)\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{dR_0(x)}{dx}\frac{du}{dx}=0,\\&\alpha R_0(x)\left(\frac{d^2w}{dx^2}-\frac{d\varphi}{dx}\right)+\alpha\frac{dR_0(x)}{dx}\left(\frac{dw}{dx}-\varphi\right)-\\&\left[P+Q(x)\right]\frac{d^2w}{dx^2}-\frac{dQ(x)}{dx}\frac{dw}{dx}=0,\\&R_2(x)\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{dR_2(x)}{dx}\frac{d\varphi}{dx}+\alpha R_0(x)\left(\frac{dw}{dx}-\varphi\right)=0\end{aligned}\tag{۳۰}$$

همان‌گونه که ملاحظه می‌شود معادله مربوط به تغییر شکل محوری از دو معادله دیگر مجزا است که دلیل این مساله تقارن در خواص مکانیکی ماده نسبت به تار خنثی است که به شکل $R_1=0$ اثر خود را پیش‌تر نشان داده بود. در نتیجه می‌توان معادلات حاکم (۳۰) و شرایط مرزی (۲۹) را با استفاده از رابطه (۲۱) به شکل زیر ساده‌سازی کرد:

$$\begin{aligned}&\alpha R_0(x)\left(\frac{d^2w}{dx^2}-\frac{d\varphi}{dx}\right)+\alpha\frac{dR_0(x)}{dx}\left(\frac{dw}{dx}-\varphi\right)-\\&P\frac{d^2w}{dx^2}-q_0\left[S(x)\frac{d^2w}{dx^2}+\frac{dS(x)}{dx}\frac{dw}{dx}\right]=0,\\&R_2(x)\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{dR_2(x)}{dx}\frac{d\varphi}{dx}+\alpha R_0(x)\left(\frac{dw}{dx}-\varphi\right)=0\end{aligned}\tag{۳۱}$$

و شرایط مرزی

$$\begin{aligned}&\delta w=0 \quad \text{or} \quad Q_{xz}-\left[P+Q(x)\right]\frac{dw}{dx}=0\\&\delta\varphi=0 \quad \text{or} \quad M_{xx}=0\end{aligned}\tag{۳۲}$$

برای تیر یک سر درگیر شرایط مرزی در دو انتهای زیر به شکل زیر هستند:

$$\text{At}\quad x=0:\quad w=0,\qquad \varphi=0\tag{۳۳}$$

$$\text{At}\quad x=L:\ Q_{xz}-\left[P+Q(x)\right]\frac{dw}{dx}=0,\ M_{xx}=0\tag{۳۴}$$

روابط (۲۱) و (۲۲) نشان می‌دهد که در هر سه حالت بارگذاری گسترده رابطه $Q(L)=0$ برقرار است. با استفاده از این نکته و استفاده از رابطه (۱۶) می‌توان شرایط مرزی (۳۴) در انتهای آزاد تیر را به شکل زیر بیان کرد:

$$\text{At}\quad x=L:\ \alpha R_0\left(\frac{dw}{dx}-\varphi\right)-P\frac{dw}{dx}=0,\quad \frac{d\varphi}{dx}=0\tag{۳۵}$$

با توجه به این که هر دو بار محوری ثابت و گسترده می‌توانند منجر به کمانش تیر شوند، می‌توان مساله کمانش را در دو حالت بررسی کرد. در **حالت اول** کمانش تحت بار متمرکز P به ازای یک مقدار مشخص از بار گسترده q، و **حالت دوم** کمانش تحت بار گسترده q به ازای یک مقدار مشخص از بار متمرکز P بررسی می‌شود.

$$\begin{aligned}&\alpha R_0(x)\left(\frac{d^2w}{dx^2}-\frac{d\varphi}{dx}\right)+\alpha\frac{dR_0(x)}{dx}\left(\frac{dw}{dx}-\varphi\right)-\\&q_0\left[S(x)\frac{d^2w}{dx^2}+\frac{dS(x)}{dx}\frac{dw}{dx}\right]=P\frac{d^2w}{dx^2},\\&R_2(x)\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{dR_2(x)}{dx}\frac{d\varphi}{dx}+\alpha R_0(x)\left(\frac{dw}{dx}-\varphi\right)=0\end{aligned}\tag{۳۶}$$

۳- ارائه یک روش حل عددی

اصل کلی در روش تربیع دیفرانسیلی آن است که مقدار مشتقات تابع از هر مرتبه‌ای در نقاط معینی از بازه‌ی حل مساله بر حسب مقادیر تابع در همان نقاط تخمین زده می‌شوند تا از این طریق معادلات دیفرانسیل و شرایط مرزی حاکم بر مساله با دستگاه معادلات جبری معادل‌سازی شوند. ابتدا بازه‌ی حل مساله به چند نقطه شبکه بندی شده و به‌کمک ماتریس‌های ضرایب وزنی متناظر با هر یک از مشتقات موجود در معادلات دیفرانسیل، مقدار مشتقات تابع در هر یک از این نقاط بر حسب مقادیر تابع در کل بازه تخمین زده می‌شود. به‌عنوان مثال فرض

[DOR: 20.1001.1.22287698.1401.41.1.5.7]

[DOI: 10.47176/jcme.41.1.8931]

کنید مقادیر تابع f=f(x) در N نقطه به شکل زیر در قالب یک بردار ستونی بیان شود:

$$f_i = f(x_i) \tag{۳۷}$$

در این حالت مشتق اول تابع در این نقاط را می‌توان به شکل زیر بر حسب مقادیر تابع تخمین زد:

$$\left\{\frac{df}{dx}\right\} = [A]\{f\} \tag{۳۸}$$

که در این رابطه [A] ماتریس ضرایب وزنی متناظر برای مشتق اول است که به شکل زیر تعریف می‌شود [۲۳ و ۲۲]:

$$A_{ij} = \begin{cases} \dfrac{\prod\limits_{\substack{k=1\\k\neq i,j}}^{N}(x_i - x_k)}{\prod\limits_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{N}(x_j - x_k)} & i,j = 1,2,3,\ldots,N;\quad i\neq j \\ \sum\limits_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{N} \dfrac{1}{x_i - x_k} & i = j = 1,2,3,\ldots,N \end{cases} \tag{۳۹}$$

برای محاسبه مشتق دوم می‌توان ابتدا رابطه زیر را در نظر گرفت:

$$\left\{\frac{d^2 f}{dx^2}\right\} = [B]\{f\} \tag{۴۰}$$

که در این رابطه

$$[B] = [A][A] \tag{۴۱}$$

مشتق صفرم یک تابع نیز با ماتریس همانی متناظر خواهد بود. به‌عبارت دیگر:

$$\{f\} = [I]\{f\} \tag{۴۲}$$

بنابراین در حالت کلی می‌توان رابطه زیر را برای مشتقات صفرم، اول و دوم یک تابع بیان کرد:

$$\begin{aligned} &\{f\} = [I]\{f\},\\ &\left\{\frac{df}{dx}\right\} = [A]\{f\},\\ &\left\{\frac{d^2 f}{dx^2}\right\} = [B]\{f\} \end{aligned} \tag{۴۳}$$

با افزایش تعداد نقاط در نظر گرفته شده در دامنه حل مسئله دقت پاسخ‌های به‌دست آمده افزایش می‌یابد و در نهایت در تعداد معینی از نقاط همگرایی مورد نظر ایجاد می‌شود. علاوه‌بر تعداد نقاط درنظر گرفته شده، چگونگی توزیع نقاط در دامنه‌ی حل مسئله از اهمیت بسیار بالایی برخوردار است. بهترین نوع توزیع نقاطی که تاکنون در نظر گرفته شده است توزیعی کسینوسی موسوم به توزیع چبیشف-گوس-لوباتو[۲] است. خاصیت این نوع از توزیع آن است که در این نوع توزیع تراکم نقاط در نزدیکی ابتدا و انتهای بازه حل مساله (مرزها) بیشتر از سایر نقاط است. این توزیع برای بازه [L , ۰] از رابطه زیر محاسبه می‌شود [۲۲ و ۲۳]:

$$x_i = \frac{L}{2}\left\{1 - \cos\left[\frac{(i-1)\pi}{N-1}\right]\right\} \quad i = 1,2,3,\ldots,N \tag{۴۴}$$

در این بخش معادلات حاکم به‌دست آمده در بخش پیشین در هر دو حالت بیان شده برای کمانش به شکلی تقریبی حل می‌شوند تا مقدار بحرانی کمانش و شکل مود متناظر محاسبه شوند.

۳-۱- کمانش تحت بار متمرکز P به ازای یک مقدار مشخص از بار گسترده q

با استفاده از رابطه (۴۳) می‌توان معادله حاکم (۳۶) را به شکل جبری زیر بیان کرد:

$$\begin{aligned} &\alpha[r_0]\big([B]\{w\} - [A]\{\varphi\}\big) + \alpha[dr_0]\big([A]\{w\} - \{\varphi\}\big)\\ &-q_0\big([s][B]\{w\} + [ds][A]\{w\}\big) = P[B]\{w\},\\ &[r_2][B]\{\varphi\} + [dr_2][A]\{\varphi\} + \alpha[r_0]\big([A]\{w\} - \{\varphi\}\big) = \{0\} \end{aligned} \tag{۴۵}$$

که در این رابطه ماتریس‌هایی قطری به شکل زیر تعریف شده‌اند:

$$\begin{aligned} &[r_0]_{ii} = R_0(x_i),\quad [r_2]_{ii} = R_2(x_i),\quad [s]_{ii} = S(x_i),\\ &[dr_0]_{ii} = \left.\frac{dR_0}{dx}\right|_{x=x_i},\quad [dr_2]_{ii} = \left.\frac{dR_2}{dx}\right|_{x=x_i},\ [ds]_{ii} = \left.\frac{dS}{dx}\right|_{x=x_i}, \end{aligned} \tag{۴۶}$$

با تعریف بردار جابجایی کل به شکل زیر

$$\{v\} = \begin{Bmatrix} \{w\} \\ \{\varphi\} \end{Bmatrix} \tag{۴۷}$$

می‌توان رابطه (۴۵) را به شکل زیر نوشت:

$$[K]\{v\} = P[G]\{v\} \tag{۴۸}$$

که در این رابطه:

$$[K]=\begin{bmatrix}\alpha([r_0][B]+[dr_0][A])-q_0([s][B]+[ds][A]) & -\alpha([r_0][A]+[dr_0]) \\ \alpha[r_0][A] & [r_2][B]+[dr_2][A]-\alpha[r_0]\end{bmatrix},$$

$$[G]=\begin{bmatrix}[B] & [0] \\ [0] & [0]\end{bmatrix}$$

(۴۹)

که در این رابطه [۰] ماتریس مربعی صفر از مرتبه N است، و شرایط مرزی (۳۳) و (۳۵) نیز به‌کمک روابط (۴۳) و (۴۸) به شکل جبری زیر قابل بیان است:

$$[T]\{v\}=P[O][v] \tag{۵۰}$$

که در این رابطه

$$[T]=\begin{bmatrix}I_1 & \{0\}_{1\times N} \\ \{0\}_{1\times N} & I_1 \\ \alpha R_0(L)A_N & -\alpha R_0(L)I_N \\ \{0\}_{1\times N} & A_N\end{bmatrix}$$
$$[O]=\begin{bmatrix}\{0\}_{1\times N} & \{0\}_{1\times N} \\ \{0\}_{1\times N} & \{0\}_{1\times N} \\ A_N & \{0\}_{1\times N} \\ \{0\}_{1\times N} & \{0\}_{1\times N}\end{bmatrix} \tag{۵۱}$$

و در این رابطه زیرنویس‌های ۱ و N به‌ترتیب بیانگر سطرهای اول و آخر هر ماتریس هستند.

به‌منظور محاسبه بار بحرانی تیر لازم است معادلات جبری (۴۸) و (۵۰) به شکل همزمان حل شوند. مشکل اصلی در این حالت آن است که تعداد معادلات نهایی بیشتر از تعداد مجهولات می‌شود و ماتریس‌های نهایی که برای حل معادله به‌دست می‌آیند به شکل مربعی نخواهند بود. برای حل این مشکل نقاط حل مسئله را به دو دسته تقسیم می‌کنیم که شامل نقاط مرزی[۳] (با زیرنویس b) و نقاط میانی[۴] (با زیرنویس d) است. نقاط مرزی نقاطی هستند که در دو سوی بازه حل مساله بوده و تعداد آنها برابر با تعداد معادلات مازاد (تعداد شرایط مرزی) خواهد بود و سایر نقاط نیز به‌عنوان نقاط میانی شناخته می‌شوند. در روش تربیع دیفرانسیل از ارضای معادلات حاکم در نقاط مرزی صرف‌نظر می‌شود و سطرهای مربوط به این نقاط از معادلات حاکم حذف خواهند شد تا به‌جای آنها معادلات شرایط مرزی نوشته شوند [۲۳]. لازم به‌ذکر است که نقاطی که قرار است از ارضای معادلات حاکم در آنها صرف‌نظر شود می‌توانند نقاط مرزی نبوده و در هر بخش دلخواهی از بازه قرار داشته باشند اما با توجه به تراکم بالای نقاط حل مساله در مرزها در توزیع چبیشف–گاوس–لوباتو (رابطه (۴۴)) ، نقاط مرزی بهترین انتخاب برای انجام این مهم هستند. با توجه به وجود چهار شرط مرزی در این مساله، نقاط مرزی به‌صورت زیر انتخاب می‌شوند:

$$\{v\}_b=\begin{Bmatrix}w_1 \\ w_N \\ \varphi_1 \\ \varphi_N\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}v_1 \\ v_N \\ v_{N+1} \\ v_{2N}\end{Bmatrix} \tag{۵۲}$$

سایر نقاط نیز به‌عنوان نقاط میانی درنظر گرفته شده که با نماد $\{v\}_d$ نشان داده می‌شوند. با حذف معادلات حاکم در نقاط مرزی، رابطه (۴۸) به شکل زیر بیان می‌شود:

$$[\bar{K}]\{v\}=P[\bar{G}]\{v\} \tag{۵۳}$$

که در این رابطه علامت بار بیانگر ماتریس متناظر غیرمربعی از مرتبه‌ی ۲N× (۴ – ۲N) است. با ترکیب روابط (۵۰) و (۵۳) می‌توان رابطه نهایی را به شکل زیر بدست آورد:

$$[K^*]\{v\}=P[G^*]\{v\} \tag{۵۴}$$

که در این رابطه

$$[K^*]=\begin{bmatrix}[\bar{K}] \\ T\end{bmatrix},\ [G^*]=\begin{bmatrix}[\bar{G}] \\ [O]\end{bmatrix} \tag{۵۵}$$

۳-۲- کمانش تحت بار گسترده q به ازای یک مقدار مشخص از بار مترکز P

با استفاده از رابطه (۴۳) می‌توان معادله حاکم (۳۶) را به شکل جبری زیر بیان کرد:

$$\alpha[r_0]([B]\{w\}-[A]\{\varphi\})+\alpha[dr_0]([A]\{w\}-\{\varphi\})-P[B]\{w\}=q_0([s][B]\{w\}+[ds][A]\{w\}),$$

$$[r_2][B]\{\varphi\}+[dr_2][A]\{\varphi\}+\alpha[r_0]([A]\{w\}-\{\varphi\})=\{0\}$$

(۵۶)

رابطه (۵۶) را نیز می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$[K]\{v\}=q_{۰}[G]\{v\} \tag{۵۷}$$

که در این رابطه

$$[K]=\begin{bmatrix}\alpha\left([r_{۰}][B]+[dr_{۰}][A]\right)-P[B] & -\alpha\left([r_{۰}][A]+[dr_{۰}]\right)\\ \alpha[r_{۰}][A] & [r_{۲}][B]+[dr_{۲}][A]-\alpha[r_{۰}]\end{bmatrix},$$
$$[G]=\begin{bmatrix}[s][B]+[ds][A] & [۰]\\ [۰] & [۰]\end{bmatrix} \tag{۵۸}$$

شرایط مرزی (۳۳) و (۳۵) نیز به‌کمک روابط (۴۳) و (۴۸) به شکل جبری زیر قابل بیان است:

$$[T]\{v\}=q_{۰}[O][v] \tag{۵۹}$$

که در این رابطه

$$[T]=\begin{bmatrix}I_{۱} & \{۰\}_{۱\times N}\\ \{۰\}_{۱\times N} & I_{۱}\\ \{\alpha R_{۰}(L)-P\}A_N & -\alpha R_{۰}(L)I_N\\ \{۰\}_{۱\times N} & A_N\end{bmatrix}$$
$$[O]=\begin{bmatrix}\{۰\}_{۱\times N} & \{۰\}_{۱\times N}\\ \{۰\}_{۱\times N} & \{۰\}_{۱\times N}\\ \{۰\}_{۱\times N} & \{۰\}_{۱\times N}\\ \{۰\}_{۱\times N} & \{۰\}_{۱\times N}\end{bmatrix} \tag{۶۰}$$

به‌منظور محاسبه بار بحرانی تیر لازم است معادلات جبری (۵۷) و (۵۹) به شکل همزمان حل شوند که روند حل آن مشابه روند ارائه شده در حالت قبل از روابط (۵۲) تا (۵۵) است.

۴- نتایج عددی و بحث

در این بخش نتایج عددی برای تحلیل انجام شده ارائه خواهند شد. ابتدا همگرایی تحلیل انجام شده بررسی می‌شود تا ضمن تایید همگرایی تحلیل انجام شده، تعداد نقاط مورد نیاز برای دستیابی به پاسخی همگرا و قابل اعتماد مشخص شود. پس از آن از طریق مقایسه نتایج به‌دست آمده با نتایج گزارش شده توسط سایر محققین صحت تحلیل انجام شده تایید می‌شود. سپس تأثیر مشخصات تیر روی مقدار بار بحرانی آن بررسی می‌شود. در تمامی نتایج پیش رو، به‌جز در مواردی که صراحتا ذکر شود مشخصات تیر مطابق زیر در نظر گرفته شده است:

$$E_m=۷۰\text{GPa},\ E_c=۳۸۰\text{GPa},\ \nu=۰/۳,\ L=۲\text{m},\ b=۱۰\text{cm},\quad m=۲,\quad n=۳,\quad k=\frac{۵}{۶}, \tag{۶۱}$$

تغییرات ضخامت تیر نیز به شکل $h=h_{۰}\left(۱-c\dfrac{x}{L}\right)$ فرض می‌شود که به‌جز در مواردی که ذکر شود $h_{۰}=۵$ cm و $c=۰/۵$ در نظر گرفته شده است. همچنین در بارگذاری گسترده مقدار ضریب بدون بعد β برابر با ۰/۹ در نظر گرفته شده است و تعریف بدون بعد مقادیر بارهای محوری وارد شده به تیر به شکل زیر تعریف می‌شوند:

$$P^*=\frac{PL^{۲}}{E_m I_{۰}},\ q^*=\frac{qL^{۳}}{E_m I_{۰}} \tag{۶۲}$$

که در این رابطه

$$I_{۰}=\frac{۱}{۱۲}bh_{۰}^{۳} \tag{۶۳}$$

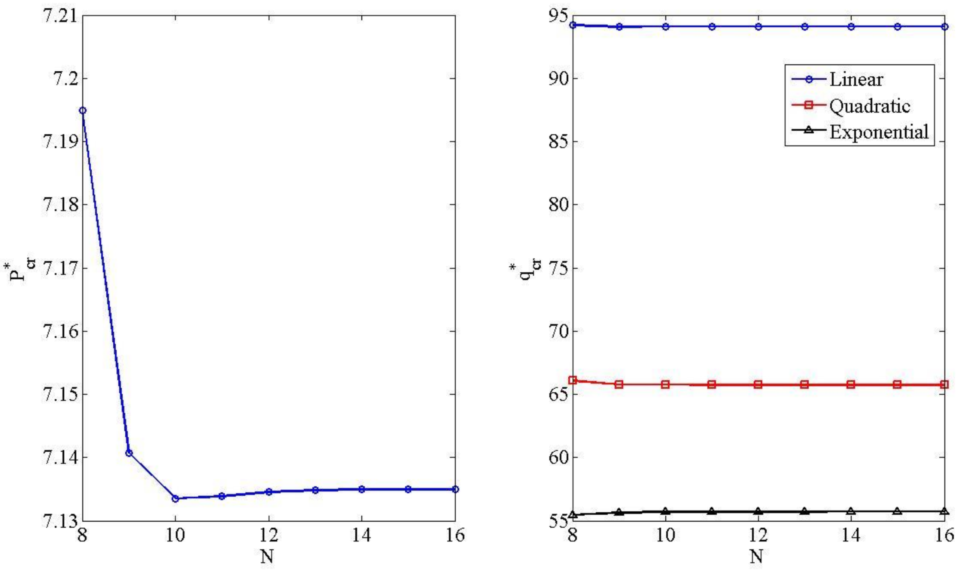
۴-۱- بررسی همگرایی حل عددی

در شکل (۲) تأثیر تعداد نقاط در حل مساله به‌روش تربیع دیفرانسیلی (N) روی مقدار بار بحرانی در هر دو حالت بارگذاری نشان داده شده است. این شکل به‌وضوح نشان می‌دهد که تحلیل عددی ارائه شده از سرعت همگرایی بسیار بالایی برخوردار است و از همین‌رو در تمامی نتایج پیش رو از N=۱۵ نقطه استفاده خواهد شد.

همچنین در شکل (۳) به ازای N= ۱۵ شکل مودهای کمانش برای بارگذاری یکنواخت و بارگذاری گسترده به ازای (β = ۰ /۹) با توزیع نمایی نشان داده شده است. تطابق شکل مود کمانش با شرایط مرزی تیر و نیز هموار بودن منحنی‌ها به نوبه خود بیانگر دقت تحلیل ارائه شده است.

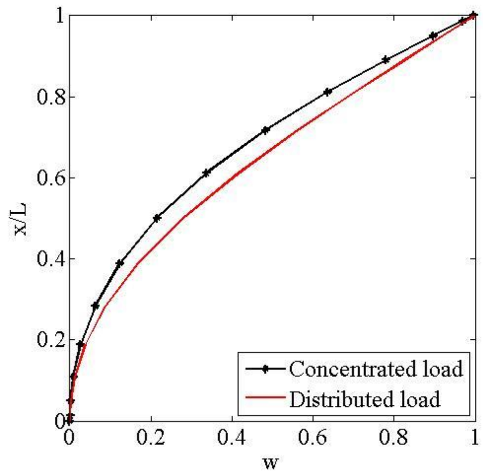
۴-۲- صحت سنجی حل

به‌منظور بررسی صحت تحلیل ارائه شده در تحلیل کمانش تیرها تحت بار متمرکز، یک تیر همگن ($E_m=E_c$) با ضخامت یکنواخت ($c=۰$) تحت بار محوری ثابت P درنظر گرفته شده است. به ازای مقادیر مختلف از ضخامت تیر، مقدار بار بحرانی تیر محاسبه شده و در جدول (۱) با مقدار دقیق گزارش شده



(ب) (الف)

شکل ۲- تحلیل همگرایی(الف) بارگذاری گسترده متغیر (β=۰/۹) (ب) بارگذاری متمرکز



شکل ۳- شکل مود کمانش در دو حالت بارگذاری متمرکز و گسترده

جدول ۱- اعتبارسنجی تحلیل ارائه شده برای تیر تحت بار متمرکز

اختلاف (٪)	بیر و همکاران [۲۴]	تحلیل ارائه شده	$\frac{h}{L}$	
۰/۰۴	۲/۴۶۷۴	۲/۴۶۶۴	۰/۰۲۵	بار بحرانی بدون بعد ($P^*_{cr}=\frac{P_{cr}L^2}{EI}$)
۰/۱۶	۲/۴۶۷۴	۲/۴۶۳۵	۰/۰۵	
۰/۶۴	۲/۴۶۷۴	۲/۴۵۱۷	۰/۱۰	
۲/۵۰	۲/۴۶۷۴	۲/۴۰۵۷	۰/۲۰	

[DOR: 20.1001.1.22287698.1401.41.1.5.7]
[DOI: 10.47176/jcme.41.1.8931]

توسط بیر و همکاران [۲۴] که از رابطه زیر محاسبه می‌شود مقایسه شده است:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2}{4}\frac{EI}{L^2} \qquad (۶۴)$$

مقایسه دو مقدار به‌دست آمده نشان می‌دهد که برای مقادیر کوچک از ضخامت (تیرهای نازک و بلند)، اختلاف بسیار ناچیزی بین نتایج وجود دارد اما با افزایش نسبت ضخامت به طول تیر اختلاف بین نتایج افزایش می‌یابد. در توجیه این مساله لازم است به این نکته اشاره شود که در تحقیق پیش رو تیر بر اساس تئوری تیموشنکو مدل‌سازی شده است اما در مرجع [۲۴] تیر بر اساس تئوری تیر اویلر-برنولی مدل‌سازی شده است که در آن از تغییر شکل برشی صرف نظر می‌شود. با توجه به افزایش اهمیت تغییر شکل برشی در مقابل با تغییر شکل خمشی در تیرهای ضخیم، مشاهده می‌شود که با افزایش نسبت ضخامت به طول مقدار اختلاف افزایش می‌یابد. جدول (۱) همچنین نشان می‌دهد که مقدار دقیق‌تر پیش‌بینی شده در این تحقیق کمتر از مقدار گزارش شده در مرجع [۲۴] است. در توجیه این مساله می‌توان به این نکته اشاره کرد که در تئوری تیر اویلر- برنولی چنان که گفته شد از تغییر شکل برشی صرف نظر می‌شود و به‌همین دلیل تیر سخت‌تر از آنچه که هست مدل‌سازی می‌شود و مقدار بار بحرانی بیشتر از آنچه که باید پیش‌بینی می‌شود.

به‌منظور بررسی صحت تحلیل ارائه شده در تحلیل کمانش تیرها تحت بار گسترده، یک تیر ناهمگن $(E_m = 210\,GPa,\ E_c = 320\ GPa,\ \nu = 0.3)$ را با ضخامت یکنواخت (c=۰) تحت بار گسترده یکنواخت (β= ۰) در نظر بگیرید. خواص مکانیکی تیر تنها در راستای ضخامت و به شکل زیر تغییر می‌کند:

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m)\left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h}\right)^p \qquad (۶۵)$$

که در این رابطه p توان پروفیل تغییرات خواص است. در این حالت لازم است رابطه (۱۷) به شکل زیر اصلاح شود:

$$R_0 = b\left(E_m + \frac{E_m - E_c}{p+1}\right)h,$$

$$R_2 = b\left\{\frac{E_m}{12} + \frac{E_m - E_c}{p+1}\left[\frac{1}{4} - \frac{1}{p+2} + \frac{2}{(p+2)(p+3)}\right]\right\}h^3 \qquad (۶۶)$$

فرض کنید بار بحرانی به شکل زیر در حالت بی بعد تعریف شود:

$$q_{cr}^* = \frac{q_{cr}L^3}{E_c I} \qquad (۶۷)$$

که در این رابطه

$$I = \frac{1}{12}bh^3 \qquad (۶۸)$$

به ازای مقادیر مختلف از نسبت طول به ضخامت تیر، مقدار بار بحرانی گسترده تیر در حالت بدون بعد محاسبه شده و در جدول (۲) با مقدار دقیق گزارش شده توسط ملاییاری و همکارانش [۱۲] مقایسه شده است. این جدول نشان می‌دهد که حداکثر اختلاف موجود کمتر از ۱/۵ درصد است که دلیل این اختلاف ناچیز هم تفاوت در تئوری‌های استفاده شده برای مدلسازی تیر است که در تحقیق پیش رو تئوری تیر تیموشنکو است اما در مرجع [۱۲] تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم یا همان تئوری تیر و ورق ردی[۵] است.

به‌منظور بررسی دقت تحلیل ارائه شده در محاسبه بار بحرانی تیرهای با سطح مقطع متغیر، تیر گوه‌ای یک سر درگیر همگن را در دو حالت زیر در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}&\text{Case A:}\quad b = b_0,\quad h = h_0\left(1 - c\frac{x}{L}\right),\\ &\text{Case B:}\quad b = b_0\left(1 - c\frac{x}{L}\right),\quad h = h_0\left(1 - c\frac{x}{L}\right)\end{aligned} \qquad (۶۹)$$

که در این رابطه زیر نویس ۰ بیانگر مقادیر متناظر در لبه‌ی درگیر تیر (x= ۰) است. با تعریف بار بحرانی بدون بعد به شکل زیر

$$P_{cr}^* = \frac{P_{cr}L^2}{EI_0} \qquad (۷۰)$$

که در آن

$$I_0 = \frac{1}{12}b_0h_0^3 \qquad (۷۱)$$

مقدار بار بحرانی در جدول (۳) به ازای $b_0 = h_0 = \sqrt{0.12}L$ و سه مقدار مختلف از متغیر بدون بعد ۰/۶، ۰/۳، ۰ =c در کنار

[DOR: 20.1001.1.22287698.1401.41.1.5.7]

[DOI: 10.47176/jcme.41.1.8931]

[DOR: 20.1001.1.22287698.1401.41.1.5.7]
[DOI: 10.47176/jcme.41.1.8931]

جدول ۲- اعتبارسنجی بار بحرانی به‌دست آمده از تحلیل ارائه شده ($q_{cr}^{*}=\frac{q_{cr}L^{۳}}{E_{c}I}$) برای تیر تحت بار گسترده

$\frac{L}{h}$	p	تحلیل ارائه شده	ملاییاری و همکاران [۱۲]	اختلاف (٪)
۵	۰	۷/۵۴۳۷	۷/۶۴۱۰	۱/۲۷
	۰/۵	۶/۵۸۴۲	۶/۶۲۰۸	۰/۵۵
	۱	۶/۲۴۷۱	۶/۲۳۶۱	۰/۱۸
	۲	۵/۹۸۱۱	۵/۹۵۳۳	۰/۴۷
۲۰	۰	۷/۸۱۸۵	۷/۹۰۵۲	۱/۱۰
	۰/۵	۶/۸۲۰۵	۶/۸۴۲۱	۰/۳۲
	۱	۶/۴۷۴۷	۶/۴۵۳۹	۰/۳۲
	۲	۶/۲۰۵۵	۶/۱۷۵۷	۰/۴۸
۱۰۰	۰	۷/۸۳۶۶	۷/۸۴۶۲	۰/۱۲
	۰/۵	۶/۸۳۶۰	۶/۷۸۸۴	۰/۷۰
	۱	۶/۴۸۹۷	۶/۴۰۴۲	۱/۳۴
	۲	۶/۲۲۰۳	۶/۱۲۷۹	۱/۵۱

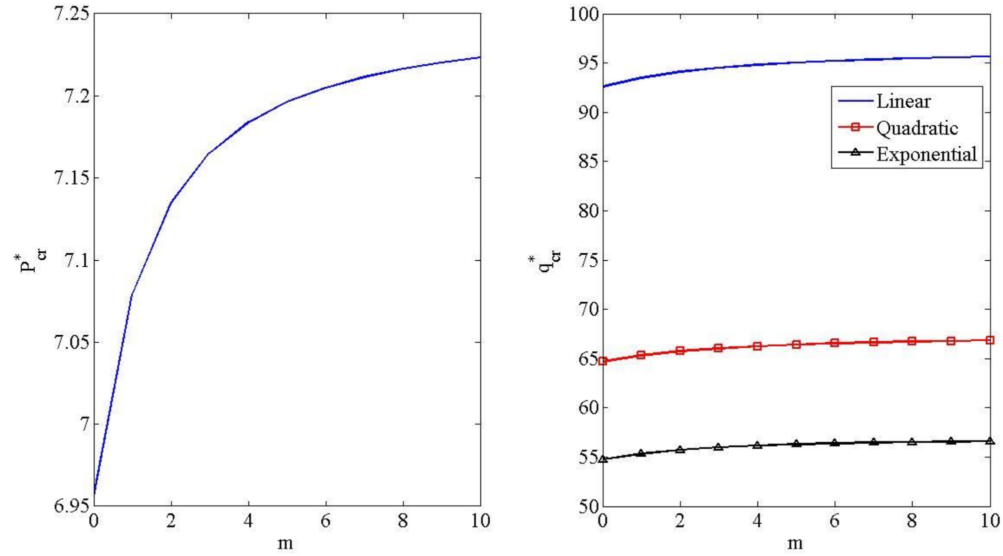
جدول ۳- اعتبارسنجی تحلیل ارائه شده برای تیر گوه‌ای تحت بار متمرکز

		Case A	Case B
		$b=b_{۰}$ $h=h_{۰}(۱-c\frac{x}{L})$	$b=b_{۰}(۱-c\frac{x}{L})$ $h=h_{۰}(۱-c\frac{x}{L})$
c = ۰	تحلیل ارائه شده	۲/۲۹۱	۲/۲۹۱
	سلطانی و عسگریان [۲۵]	۲/۲۹۱	۲/۲۹۱
c = ۰/۳	تحلیل ارائه شده	۱/۶۷۶	۱/۴۷۱
	سلطانی و عسگریان [۲۵]	۱/۶۷۶	۱/۴۷۱
c = ۰/۶	تحلیل ارائه شده	۱/۰۲۹	۰/۶۸۷
	سلطانی و عسگریان [۲۵]	۱/۰۲۹	۰/۶۸۸

مقادیر متناظر گزارش شده توسط سلطانی و عسگریان [۲۵] ارائه شده‌اند. مقایسه مقادیر گزارش شده بیانگر دقت بالای تحلیل ارائه شده است. لازم به‌ذکر است که سلطانی و عسگریان [۲۵] نیز تیر را با استفاده از تئوری تیر تیموشنکو مدل‌سازی کردند و با استفاده از روش اجزا محدود اقدام به تحلیل کمانش تیر کرده‌اند.

۴-۳- مطالعات پارامتری

برای هر دو نوع بارگذاری یکنواخت و بارگذاری گسترده متغیر تأثیر توان پروفیل در تغییرات خواص در راستای طول (m) روی بار بحرانی در شکل (۴) نمایش داده شده است. این شکل نشان می‌دهد که با افزایش مقدار m در هر دو حالت بارگذاری مقدار بار بحرانی افزایش می‌یابد. دلیل این تأثیر را می‌توان در



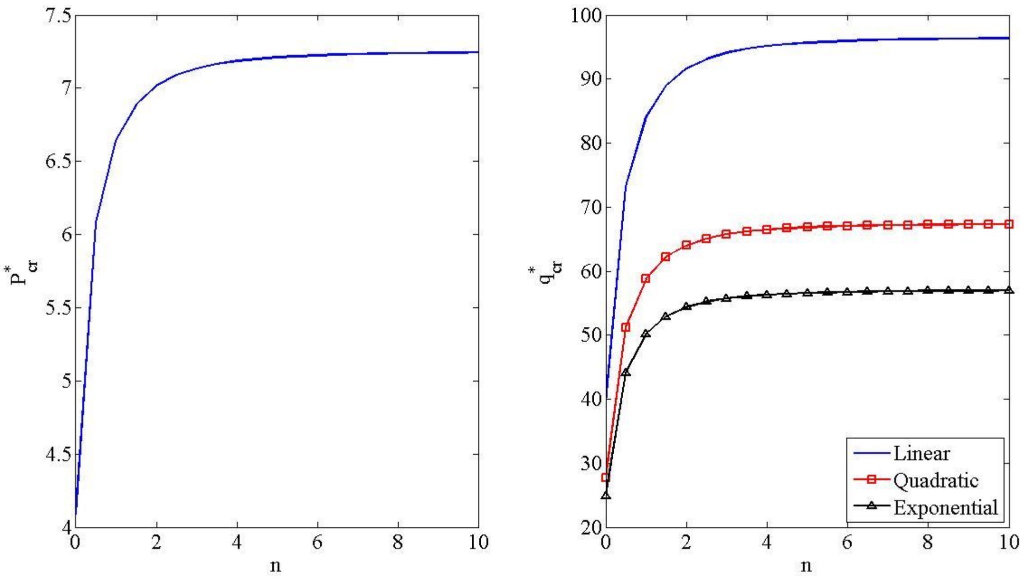
(الف) (ب)

شکل ۴- تأثیر توان پروفیل در تغییرات خواص در راستای طول (m) بر روی بار بحرانی (الف) بارگذاری گستردهی متغیر (β=۰/۹) و (ب) بارگذاری متمرکز

رابطه (۳) جستجو کرد. توضیح آنکه مقدار عبارت $1-\frac{x}{L}$ کوچکتر از واحد است و هر چه مقدار m در معادله (۳) افزایش یابد کسر حجمی فلز کاهش یافته و کسر حجمی سرامیک افزایش می‌یابد. با توجه به این که مدول الاستیسیته سرامیک درنظر گرفته شده در این پژوهش بسیار بیشتر از مدول الاستیسیته فلز است ($\frac{E_c}{E_m}\approx ۵/۴۳$) بدیهی است که با افزایش مقدار m مقدار بار بحرانی تیر افزایش یابد. شکل (۴) همچنین نشان می‌دهد که برای هر دو نوع بارگذاری به ازای مقادیر بزرگ از m مقادیر بار بحرانی به‌سمت اعداد ثابتی میل می‌کنند که این مقدار ثابت در واقع مقادیر متناظر بار بحرانی برای یک تیر کاملا سرامیکی هستند.

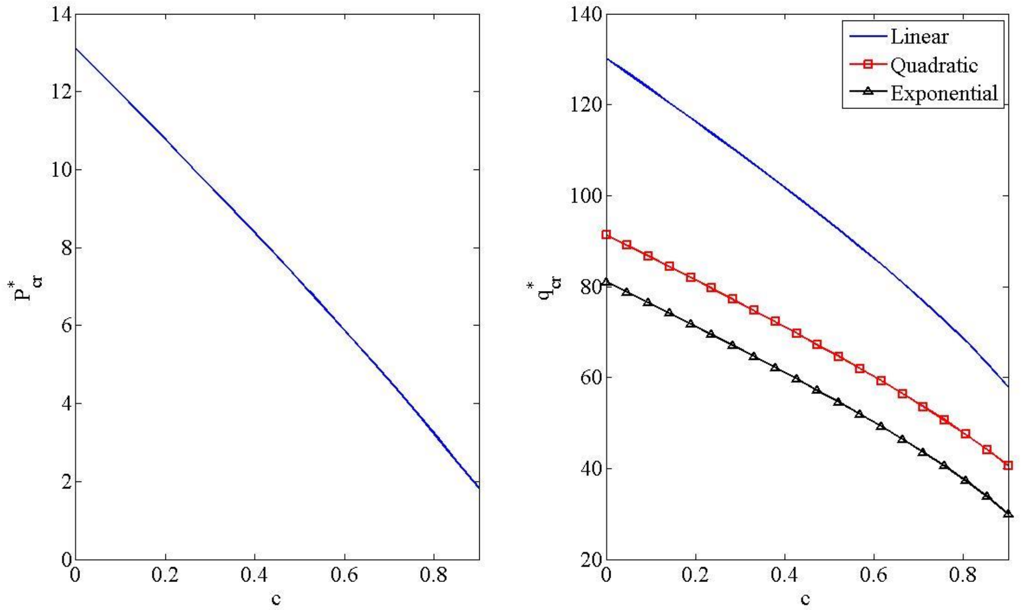
شکل (۵) برای هر دو نوع بارگذاری یکنواخت و بارگذاری گسترده متغیر تأثیر توان پروفیل در تغییرات خواص در راستای ضخامت (n) روی بار بحرانی را نشان می‌دهد. چنانکه در این شکل نشان داده شده است در هر دو حالت بارگذاری با افزایش مقدار n مقدار بار بحرانی افزایش می‌یابد که همانند آنچه که برای متغیر m گفته شد، دلیل این تأثیر را نیز می‌توان در رابطه (۳) جستجو کرد. توضیح آنکه مقدار عبارت $1-\frac{2|z|}{h}$ کوچک‌تر از واحد است و به‌همین دلیل در معادله (۳) هر چه مقدار n افزایش یابد کسر حجمی فلز کاهش یافته و کسر حجمی سرامیک افزایش می‌یابد. مجددا با توجه به این که مدول الاستیسیته سرامیک درنظر گرفته شده در این پژوهش بسیار بیشتر از مدول الاستیسیته فلز است با افزایش مقدار n مقدار بار بحرانی تیر افزایش می‌یابد. همانند شکل (۴)، شکل (۵) نیز نشان می‌دهد که برای هر دو نوع بارگذاری به ازای مقادیر بزرگ از n مقادیر بار بحرانی به‌سمت اعداد ثابتی میل می‌کنند که این مقدار ثابت در واقع مقادیر متناظر بار بحرانی برای یک تیر کاملا سرامیکی هستند.

همان‌گونه که اشاره شد در این پژوهش تغییرات ضخامت تیر به شکل $h=h_0\left(1-c\frac{x}{L}\right)$ در نظر گرفته شده است. در شکل (۶) تأثیر ضریب بدون بعد c بر روی مقدار بار بحرانی تیر در هر دو حالت از بارگذاری نشان داده شده است. این



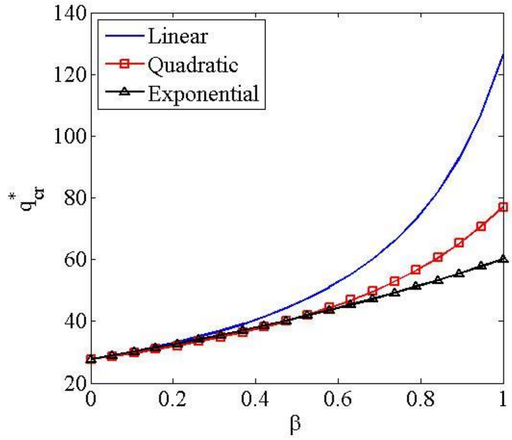
(ب) (الف)

شکل ۵- تأثیر توان پروفیل در تغییرات خواص در راستای ضخامت (n) بر روی بار بحرانی
(الف) بارگذاری گسترده ی متغیر (β=۰/۹) و (ب) بارگذاری متمرکز



(ب) (الف)

شکل ۶- تأثیر تغییرات ضخامت بر روی بار بحرانی (الف) بارگذاری گسترده‌ی متغیر (β=۰/۹)
و (ب) بارگذاری متمرکز



شکل ۷- چگونگی تغییرات بار گسترده متغیر روی بار بحرانی

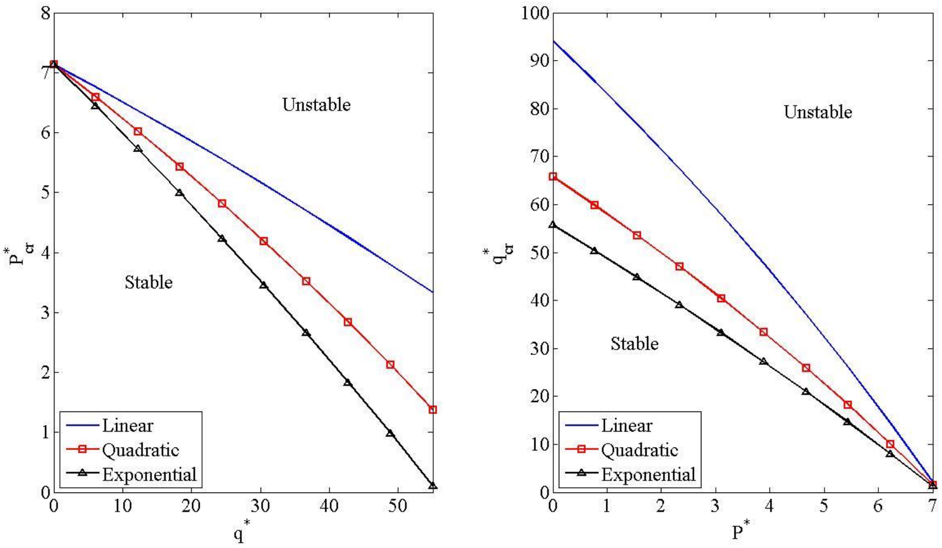
شکل نشان می‌دهد که با افزایش مقدار ضریب c و در نتیجه نوک تیزتر شدن تیر، مقدار بار بحرانی در هر دو حالت از بارگذاری کاهش می‌یابد که دلیل این مساله کاهش سفتی خمشی تیر است. البته لازم به‌ذکر است که با افزایش مقدار ضریب c و نوک تیز شدن هر چه بیشتر ستون مقدار جرم آن نیز کاهش می‌یابد و به‌همین دلیل معمولا برای ستون‌های بلند از همین روش برای کاهش وزن کل سازه استفاده می‌شود.

همان‌گونه که رابطه (۲۳) بیان شد در این پژوهش برای بارگذاری فشاری گسترده‌ی غیریکنواخت سه الگوی توزیع بار در نظر گرفته شده است که شامل توزیع خطی، توزیع سهموی و توزیع نمایی است. تأثیر ضریب بدون بعد β در هر یک از این الگوهای توزیع بر روی مقدار باربحرانی در شکل (۷) بررسی شده است. این شکل به‌خوبی نشان می‌دهد که با افزایش مقدار این ضریب، بار بحرانی تیر افزایش می‌یابد. دلیل این مطلب را می‌توان چنین توضیح داد که با افزایش مقدار ضریب بدون بعد β شدت بار گسترده محوری موجود روی تیر کاهش می‌یابد و به‌همین دلیل مقدار بار بحرانی q_{cr} افزایش می‌یابد.

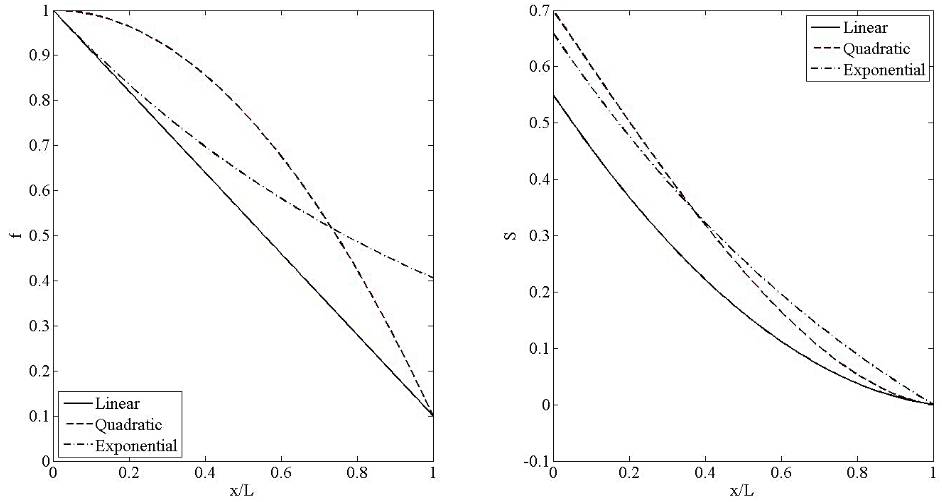
در تحلیل‌های ارائه شده در شکل‌های (۳)-(۶) فرض بر آن بود که بارهای محوری یکنواخت و متغیر به شکل مجزا (و نه همزمان) به تیر وارد شوند. یکی از نکات جذاب در این تحقیق می‌تواند بررسی تأثیر همزمان اعمال بارهای فشاری باشد که در شکل (۸) نشان داده شده است. این شکل‌ها نشان می‌دهند که با افزایش مقدار هر یک از بارهای فشاری یکنواخت یا متغیر، مقدار بحرانی بار دیگر کاهش می‌یابد که دلیل این مساله کاهش سفتی تیر در اثر اعمال بار فشاری است. شکل‌های (۵)-(۷) همچنین نشان می‌دهد که در بین الگوهای بررسی شده برای توزیع بار گسترده متغیر، بزرگ‌ترین ناحیه پایداری متعلق به بارگذاری خطی و کوچک‌ترین ناحیه پایداری متعلق به بارگذاری نمایی است. به‌منظور بررسی چرایی این مساله در شکل (۹) تغییرات بار گسترده وارد شده بر تیر (f) و نیروی محوری معادل آن (S) به شکل همزمان به ازای β=۰/۹ نشان داده شده‌اند. این شکل به‌خوبی نشان می‌دهد که در حالت خطی شدت بار و در نتیجه نیروی محوری معادل آن کم‌ترین مقدار در بین سه الگو است و به‌همین دلیل بزرگ‌ترین نواحی پایداری متعلق به این الگوی توزیع است.

با توجه به این‌که در تعریف مقدار بار بحرانی بدون بعد در رابطه (۶۲) از مشخصات هندسی تیر طول، ضخامت و پهنا استفاده شده است، ممکن است تفاسیر انجام شده برای مقدار بار بحرانی بدون بعد برای حالت با بعد (حالت واقعی) برقرار نباشند. به‌همین دلیل و در ادامه تأثیر این سه مشخصه هندسی بر روی مقدار بار بحرانی تیر به شکل با بعد انجام خواهد گرفت.

در شکل (۱۰) تأثیر طول تیر بر روی بار بحرانی در هر دو



شکل ۸- نواحی پایداری در هنگام اعمال همزمان بار متمرکز و بار گسترده متغیر (β=۰/۹)

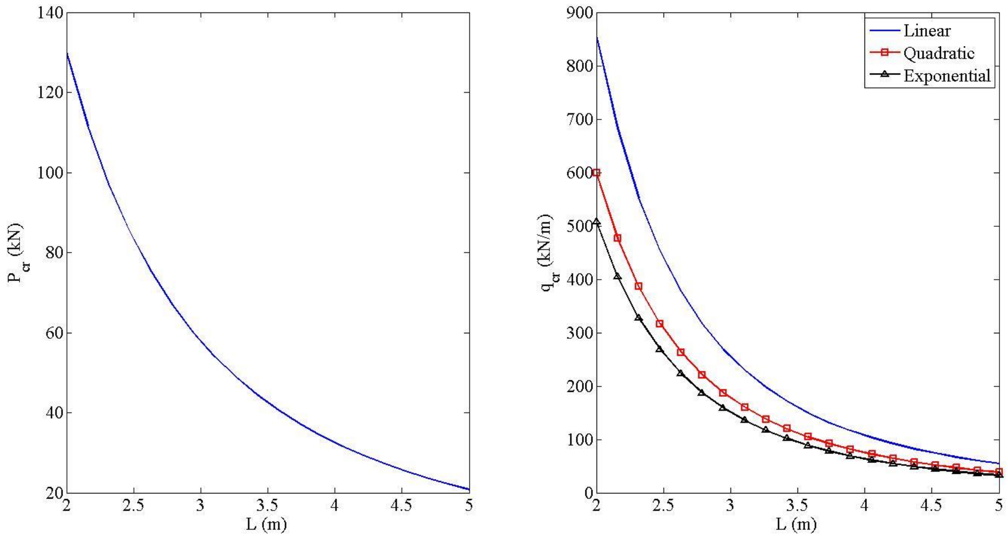


شکل ۹- مقایسه الگوهای بار گسترده متغیر با یکدیگر (β=۰/۹)

حالت بارگذاری گسترده متغیر و بارگذاری یکنواخت نشان داده شده است. این شکل نشان می‌دهد که با افزایش طول تیر مقدار بار بحرانی در هر دو حالت بارگذاری دچار افت بسیار شدیدی می‌شود که دلیل آن افزایش ضریب لاغری تیر است.

تأثیر مقدار ضخامت تیر بر روی بار بحرانی در هر دو حالت بارگذاری گسترده متغیر و بارگذاری یکنواخت در شکل (۱۱) نشان داده شده است. این شکل نشان می‌دهد که با افزایش ضخامت تیر، در هر دو حالت از بارگذاری افزایش ضخامت تیر افزایش پایداری آن را به‌همراه دارد که دلیل این مساله افزایش ممان اینرسی مقطع تیر ($I=\frac{1}{12}bh^3$) است.

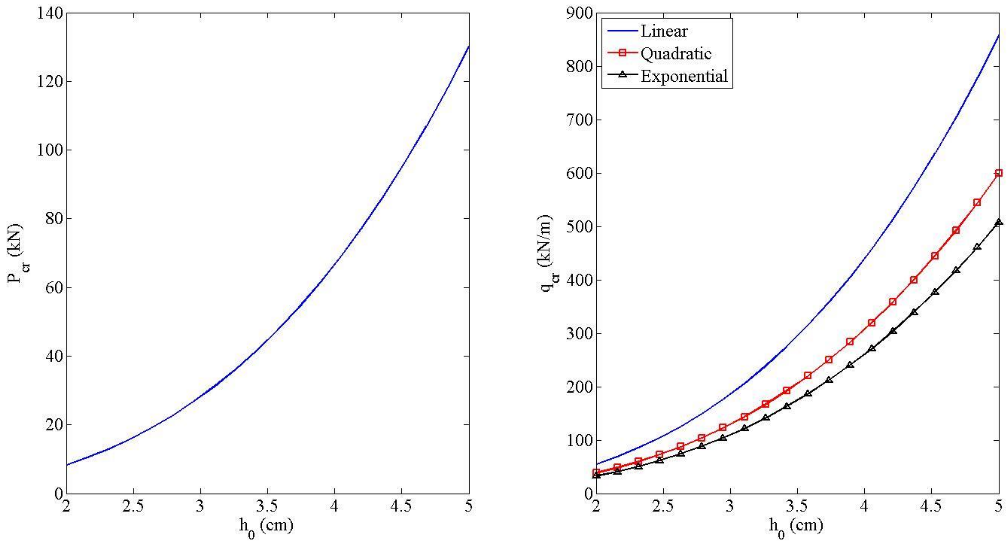
شکل (۱۲) تأثیر مقدار پهنای تیر روی بار بحرانی در هر دو حالت بارگذاری گسترده متغیر و بارگذاری یکنواخت را نشان می‌دهد. همانند شکل (۱۱)، شکل (۱۲) نیز نشان می‌دهد که در هر دو حالت از بارگذاری با افزایش پهنای تیر، مقدار بار



(ب) (الف)

شکل ۱۰- تأثیر طول تیر روی بار بحرانی (الف) بارگذاری گسترده متغیر (β=۰/۹)

(ب) بارگذاری متمرکز

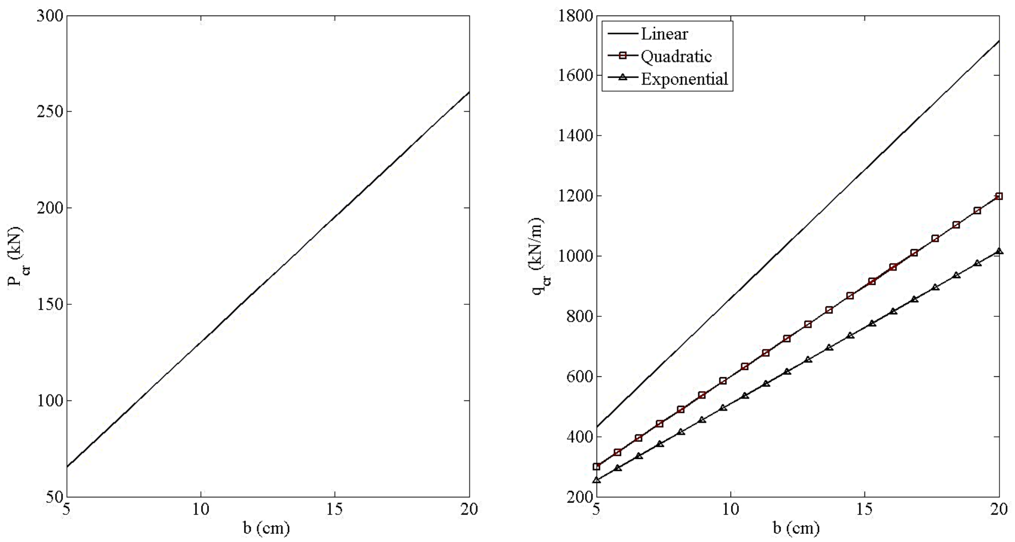


(ب) (الف)

شکل ۱۱- تأثیر اندازه ضخامت تیر روی بار بحرانی (الف) بارگذاری گسترده متغیر (β=۰/۹)

(ب) بارگذاری متمرکز

بحرانی تیر افزایش می‌یابد که دلیل این مساله نیز افزایش ممـان اینرسی مقطع تیر است. لازم به‌ذکر است که دلیل تفـاوت تـأثیر ضخامت و پهنای تیر روی مقدار بار بحرانی تیر در آن است که توان این دو متغیر در رابطه $I=\frac{۱}{۱۲}bh^{۳}$ با یکدیگر تفاوت دارد.



(ب) (الف)

شکل ۱۲- تأثیر پهنای تیر روی بار بحرانی (الف) بارگذاری گسترده متغیر (β=۰/۹)
(ب) بارگذاری متمرکز

۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله به تحلیل کمانش تیرهای با سطح مقطع مستطیلی با پهنای ثابت و ضخامت متغیر و ساخته شده از مواد مدرج تابعی دو بعدی پرداخته شد. تیر از ترکیب فلز با سرامیک در نظر گرفته شد به‌طوری که کسر حجمی هر یک از آنها در راستای طول تیر و همچنین در راستای ضخامت آن بر اساس توابع توانی تغییر کند و تیر به شکل همزمان تحت اثر نیروی‌های محوری متمرکز و گسترده بر واحد طول باشد. معادلات حاکم و شرایط مرزی با استفاده از اصل انرژی پتانسیل کمینه استخراج شدند و با استفاده از روش تربیع دیفرانسیلی برای تیر با شرایط مرزی یک سر درگیر به شکلی تقریبی حل شدند. نتایج به‌دست آمده در این تحقیق را می‌توان به شکل زیر جمع‌بندی کرد:

- با افزایش توان پروفیل در تغییرات خواص در راستاهای طول و ضخامت تیر مقدار بار بحرانی افزایش می‌یابد.
- هر چه تغییرات ضخامت تیر به شکلی حادتر باشد (تیر نوک‌تیزتر باشد)، مقدار بار بحرانی کاهش می‌یابد (البته وزن تیر نیز کاهش می‌یابد).
- اعمال هر یک از نیروهای محوری یکنواخت یا گسترده متغیر، پایداری تیر را برای تحمل بار دیگر کاهش می‌دهد.
- در میان الگوهای بررسی شده برای توزیع بار گسترده، وسیع‌ترین ناحیه پایداری متعلق به الگوی خطی است و کوچکترین ناحیه پایداری متعلق به بارگذاری نمایی است.
- با افزایش طول تیر، مطابق انتظار مقدار بار بحرانی کاهش می‌یابد.

مطابق انتظار، با افزایش پهنا و ضخامت تیر، مقدار بـار بحرانـی افزایش می‌یابد.

واژه‌نامه

1. differential quadrature method (DQM)
2. Chebyshev-Gauss-Lobatto
3. boundary points
4. domain points
5. Reddy’s beam/plate theory

مراجع

1. Bagcri, C., "Elastic stability and Buckling Loads of Multi-Span Nonuniform Beams, Shafts and Frames On Rigid or Elastic Supports by Finite Element Method Using Planar Uniform Line Elements", *Computers & Structures*, Vol. 12, pp. 233-243, 1980.
2. Gauss , R.C., and Antman S.S., "Large Thermal Buckling of nonuniform Beams and Plates", *International journal of solids and structures*, Vol. 20, pp. 979-1000, 1984.
3. Huang, Y., Zhang, M.,and Rong, H., "Buckling Analysis of Axially Functionally Graded and Non-Uniform Beams Based on Timoshenko Theory", *Acta Mechanica Solida Scinica*, Vol. 29, pp. 200-207, 2016.
4. Rajasekaran, S., Khaniki, H. B., "Bending, Buckling and Vibration of Small-Scale Tapered Beams", *International Journal of Engineering Science*,Vol. 120, pp.172-188, 2017.
5. Ozbasaran, H., and Yilmaz, T., "Shape Optimization of tapered I-beams with Lateral-Torsional Buckling, Deflection and Stress Constraints", *Journal of Constructional Steel Research*, Vol. 143, pp. 119-130, 2018.
6. Tankova, T., Martins, J. P., da Silva, L. S., Marques, L., Craveiro, H. D., and Santiago, A., "Experimental Lateral-Torsional Buckling Behaviour of Web Tapered I-Section Steel Beams", *Engineering Structures*, Vol.168, pp. 355-370, 2018.
7. Wang, C., Thevendran, V., Teo, K., and Kitipornchai, S., "Optimal design of tapered beams for maximum buckling strength", *Engineering Structures*, Vol. 8, pp. 276-284, 1986.
8. Li, Q., "Exact Solutions for Buckling of Non-Uniform Columns Under Axial Concentrated and Distributed Loading", *European Journal of Mechanics-A/Solids*, Vol. 20, pp. 485-500, 2001.
9. Darbandi, S., Firouz-Abadi R., and Haddadpour, H., "Buckling of Variable Section Columns Under Axial Loading", *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 136. pp. 472-476, 2010.
10. Robinson, M. T. A., and Adali, S., "Buckling of Nonuniform Carbon Nanotubes Under Concentrated and Distributed Axial Loads", *Mechanical Sciences*, Vol. 8, pp. 299-311, 2017.
11. Karamanli, A., and Aydogdu, M., "Buckling of Laminated Composite and Sandwich Beams Due to Axially Varying in-Plane Loads", *Composite structures*, Vol. 210, pp. 391-408, 2019.
12. Melaibari, A., Abo-bakr, R. M., Mohamed, S., and Eltaher, M., "Static Stability of Higher Order Functionally Graded Beam Under Variable Axial Load", *Alexandria Eng,neering Journal*, Vol. 26, pp. 48-65, 2020.
13. Şimşek, M., "Buckling of Timoshenko Beams Composed of Two-Dimensional Functionally Graded Material (2D-FGM) Having Different Boundary Conditions", *Composite Structures*, Vol. 149, pp. 304-314, 2016.
14. Chen, X., Zhang, X., Lu, Y.,and Li, Y., "Static and Dynamic Analysis of the Postbuckling of Bi-Directional Functionally Graded Material Microbeams", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 151 pp. 424-443, 2019.
15. Rajasekaran, S., and Khaniki, H. B., "Bi-Directional Functionally Graded Thin-Walled Non-Prismatic Euler Beams of Generic Open/Closed Cross Section Part I: Theoretical Formulations", *Thin-Walled Structures*, Vol. 141, pp. 627-645, 2019.
16. Rajasekaran, S., and Khaniki, H. B., "Bi-Directional Functionally Graded Thin-Walled Non-Prismatic Euler Beams of Generic Open/Closed Cross Section Part II: Static, Stability and Free Vibration Studies", *Thin-Walled Structures*, Vol. 141, pp. 646-674, 2019.
17. Timoshenko, S. P., "On the Correction for Shear of the Differential Equation for Transverse Vibrations of Prismatic Bars", *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, Vol. 41, pp. 744-746, 1921.
18. Sadd, M. H., *Elasticity: Theory, Applications, and Numerics*, Academic Press, London, 2009.
19. Kaneko, T., "On Timoshenko's Correction for Shear in Vibrating Beams", Journal of Physics D: *Applied Physics*, Vol. 8 pp. 1927-1936, 1975.
20. Ventsel, E., Krauthammer, T., and Carrera, E., *Thin Plates and Shells: Theory, Analysis, and Applications*, CRC press, New York, 2020.
21. Hwang, C. Y., "The Buckling Problem of A Beam on An Elastic Foundation Under Distributed Axial Loads", *Thesis*, Kansas State University, 1965.
22. Bert, C. W., and Malik, M., "Differential Quadrature Method in Computational Mechanics: A Review", Applied Mechanics Reviews, Vol. 49, pp. 1-28, 1996.
23. Afshari H., *Differential Quadrarure Method in the Solution of the Mechanical Engineering Problems*, Pouyesh Andisheh Publications,1398 (In Persian).
24. Beer, F., Johnston, E, and DeWolf, J., *Mechanics of Materials*, 5th SI Edition, Stress, Ed. 1, pp. 1-12, 1999.
25. Soltani, M., and Asgarian, M. B., "Finite Element Formulation for Linear Stability Analysis of Axially Functionally Graded Nonprismatic Timoshenko Beam", *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, Vol. 19, pp. 195-202, 2019.