

## حل عددی معادله جریان یک بعدی آب در خاک با استفاده از روش عملگرهای مرجع

کوروش محمدی<sup>۱</sup>

### چکیده

در این مقاله یک مدل عددی برای حل جریان یک بعدی آب در محیط غیراشباع معرفی گردیده است. جریان آب در لایه‌های غیراشباع خاک تابع یک معادله غیرخطی است، که حل تحلیلی آن بجز در موارد محدود و ساده شده امکان‌پذیر نیست. در این تحقیق معادلات دیفرانسیلی حرکت آب در خاک، با استفاده از یک روش تفاضل محدود جدید موسوم به روش عملگرهای مرجع حل گردید. روش عملگرهای مرجع برای جای‌گزین کردن معادلات دیفرانسیل جزئی با یک رشته معادلات تقریبی انتخاب گردیده که قابل حل کردن با روش‌های عددی هستند. بسیاری از روش‌های استاندارد تفاضل‌های محدود، حالت خاصی از این روش‌اند. ولی برخلاف آنها، با استفاده از این روش می‌توان محیط‌های با مرز نامنظم را هم مدل نمود. یک مدل یک بعدی برای پیش‌بینی مکش آب خاک (بار فشاری منفی) و مقدار رطوبت در خاک غیرهمگن، که دارای لایه‌بندی متفاوت است، با استفاده از روش عملگرهای مرجع ساخته شده، و با تعدادی حل تحلیلی و نتایج آزمایشگاهی مقایسه گردید. نتایج نشان‌دهنده دقت خوب و قابل قبول مدل در شبیه‌سازی حرکت آب در خاک می‌باشد.

واژه‌های کلیدی: جریان در محیط غیراشباع، مدل‌سازی مکش آب خاک، روش عملگرهای مرجع

### مقدمه

معادلات دیفرانسیلی غیرخطی هستند که حل دقیق و تحلیلی آنها در بیشتر حالت‌ها امکان‌پذیر نیست. به همین دلیل، روش‌های عددی به عنوان یک ابزار قدرتمند، در حل این گونه معادلات کاربرد وسیعی پیدا کرده است. طی یکی دو دهه اخیر، مدل‌های عددی زیادی ارائه شده است که هر کدام دارای ویژگی‌های مثبت و منفی می‌باشند. طی یک تحقیق، واندرهیچ و همکاران (۱۳) نشان دادند که تا آن زمان تعداد ۳۹۹ مدل

مدل‌های حرکت آب در محیط غیراشباع از دیرباز مورد توجه دانشمندان علوم آب بوده است. باکینگهام (۲) جریان آب در محیط غیراشباع را به صورت تابعی از گرادیان مکش، که از فشار مویبندی ناشی می‌شود، بیان کرد. معادله دیفرانسیلی حرکت آب در خاک توسط ریچاردز (۷)، با استفاده از تشابه بین انتقال حرارت و جریان آب در محیط متخلخل حل گردید. معادلات جریان آب در محیط غیراشباع، یک دسته

۱. استادیار آبیاری و زه‌کشی دانشگاه تربیت مدرس

### مواد و روش‌ها

در این پژوهش از روش عملگرهای مرجع برای حل معادله یک بعدی حرکت آب در محیط غیراشباع و غیرهمگن استفاده شده، و مدل تهیه شده با حل تحلیلی و نتایج مشاهده‌ای حرکت آب در خاک مقایسه گردیده است.

### معادلات حاکم بر جریان

با استفاده از معادله پیوستگی و قانون داریسی، معادله یک‌بعدی حرکت آب در محیط غیراشباع در جهت عمودی به صورت زیر است (۵):

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[ K(\theta) \left( \frac{\partial h}{\partial z} + 1 \right) \right] = C(h) \frac{\partial h}{\partial t} + q \quad [1]$$

که در آن:

$K(\theta)$  = هدایت هیدرولیکی غیراشباع خاک و تابعی از مقدار

رطوبت  $\theta$

$h$  = مکش آب خاک (بار فشاری منفی) <sup>۳</sup>

$z$  = مختصات مکان در جهت محور عمودی  $z$

$t$  = زمان

$q$  = عامل تغذیه و یا تخلیه

$C(h) = \frac{\partial S_w}{\partial h}$  = ظرفیت ویژه آب خاک، که برابر است با

$\phi$  = تخلخل خاک

$S_w$  = درجه اشباع خاک

روش‌های متعددی برای محاسبه رابطه بین درجه اشباع ( $S_w$ ) و فشار مویینگی یا مکش آب خاک ( $h$ ) ارائه شده است، که معروف‌ترین آنها روابط لورت (۶)، بروک و کری (۱) و وان گنوختن (۱۴) می‌باشد. در مدل حاضر از رابطه وان گنوختن به صورت زیر استفاده شده است:

$$S_e = \left[ 1 + (\alpha h)^n \right]^{-m} \quad [2]$$

عددی وجود داشته است. هدفی که بین همه تهیه کنندگان مدل‌ها مشترک بود، ارائه یک مدل با محدودیت‌های کمتر و عمومیت بیشتر بود، که در عین حال بتواند سادگی انجام محاسبات را حفظ کند.

استفاده از یک روش عددی عمومی که بتواند همه ویژگی‌های مهم یک مسئله فیزیکی، همچون پدیده حرکت آب در خاک را پوشش دهد، بسیار مشکل است، به ویژه هنگامی که شکل محیط و منطقه مورد مطالعه به صورت نامنظم بوده و شرایط مرزی پیچیده باشد. بنابراین، داشتن یک روش حل عددی، که بتواند در اکثر موارد قابل استفاده باشد، بسیار مهم است. از میان روش‌های عددی می‌توان روش تفاضل محدود، اجزای محدود و اجزای مرزی را نام برد. به طور کلی، روش‌های عددی دارای دو مرحله هستند: ابتدا معادلات دیفرانسیل با یک رشته معادلات تقریبی جای‌گزین می‌شوند، و سپس با استفاده از یک روش محاسباتی، دستگاه معادلات به دست آمده حل می‌گردد. یکی از روش‌هایی که برای تخمین تقریبی و جای‌گزین کردن معادلات به کار رفته روش عملگرهای مرجع<sup>۱</sup> است. بسیاری از روش‌های تفاضل‌های محدود استاندارد، و هم چنین روش حجم محدود<sup>۲</sup> حالت‌های خاص این روش هستند (۱۲). برخلاف روش معمول تفاضل محدود، روش عملگرهای مرجع را می‌توان برای شبکه‌های نامنظم چهارضلعی نیز به کار برد. این روش توسط دانشمندان روسی، در طی چندین سال بسط داده شده است (۹ و ۱۰). آنها این روش را برای حل معادلات بیضوی و انتقال حرارت به کار بردند (۳، ۴، ۱۰، ۱۱ و ۱۲)، و نشان دادند که یک روش پایدار و قابل اعتماد، به خصوص برای محیط‌های با مرز نامنظم است. گرچه روش عملگرهای مرجع دارای سابقه طولانی در ریاضیات است، ولی تاکنون از آن در علوم آب استفاده نگردیده است. این روش که مزیت اصلی آن نسبت به روش تفاضل محدود کلاسیک، استفاده آن از شبکه نامنظم است، می‌تواند در شبیه‌سازی مرزهای نامنظم، به ویژه در محیط دوبعدی بسیار مفید باشد.

1. Method of reference operators

2. Finite Volume

3. Soil-water suction (negative pressure head)

فراهم می‌سازد. شکل ۱ نمونه‌ای از این نوع شبکه است. گره‌ها از محل تلاقی خطوط به وجود آمده، و هر گره به وسیله دو اندیس  $i$  و  $k$  مشخص می‌گردد. در حالت یک بعدی، فواصل گره‌ها ممکن است به صورت نامنظم تغییر کند، و هر گره با یک اندیس  $i$  مشخص می‌شود. در روش عملگرهای مرجع، با استفاده از فرمول گرین<sup>۱</sup> برای مشتق مرتبه اول تابع  $u$  نسبت به  $x$ ، رابطه زیر را می‌توان نوشت (۱۲):

$$\int_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} d\Omega = \int_S \vec{u} \cdot d\vec{S} \quad [6]$$

که در این رابطه  $S$  سطح بسته‌ای است که حجم دلخواه  $\Omega$  را می‌پوشاند و  $u$  یک تابع پیوسته با مشتقات جزئی روی ناحیه  $\Omega$  است.

با استفاده از تعریف انتگرال و متوسط‌گیری به عنوان تابعی از مقادیر آن روی مرزها، می‌توان نوشت:

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{\Omega} = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x} d\Omega = \frac{1}{\Omega} \int_S u \vec{I}_x \cdot d\vec{S} \quad [7]$$

که در آن  $I_x$  برداری است که در جهت محور  $x$  می‌باشد. در یک محیط یک‌بعدی،  $S$  برابر طول یک سلول بوده و می‌توان نوشت:

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{\Omega} = \frac{1}{\Omega} \int_b u dx = - \frac{1}{\Omega} \int_b x du \quad [8]$$

برای تعیین تقریبی انتگرال در سمت راست معادله ۸، از روش ذوزنقه استفاده می‌شود، و با توجه به این که جهت حرکت آب در خاک در راستای قائم در نظر گرفته شده است، از این به بعد از متغیر  $z$  به عنوان متغیر طول، با جهت مثبت از بالا به پایین استفاده می‌گردد:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{\Delta z} (u_i - u_{i-1}) \quad [9]$$

که در آن  $\alpha$  و  $n$  مقادیر ثابت تجربی هستند که به نوع خاک وابسته بوده، و  $m = 1 - \frac{1}{n}$  می‌باشد.  $S_e$  درجه اشباع مؤثر است و از رابطه زیر محاسبه می‌شود (۱۴):

$$S_e = \frac{S_w - S_{rw}}{1 - S_{rw}} = \frac{\theta_w - \theta_{rw}}{1 - \theta_{rw}} \quad [3]$$

$S_{rw}$  و  $\theta_{rw}$  به ترتیب درجه اشباع باقی مانده، و حداقل میزان رطوبتی است که در آن جریان آب عملاً در خاک متوقف می‌شود.

در محیط غیراشباع، چون فقط قسمتی از تخلخل محیط متخلخل برای جریان آب در دسترس است، بایستی خاک را نسبت به حالت اشباع تصحیح کرد. برای این منظور از ضریبی به نام ضریب هدایت هیدرولیکی نسبی ( $K_{rw}$ ) استفاده گردیده، و توسط رابطه زیر به هدایت هیدرولیکی اشباع ربط داده می‌شود (۶):

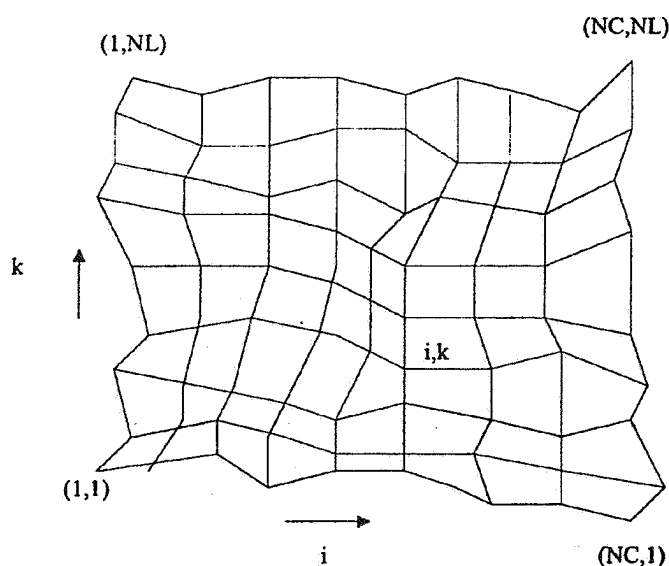
$$K_w = K_{rw} K_{sw} \quad [4]$$

که در این رابطه  $K_{sw}$  هدایت هیدرولیکی اشباع، و  $K_w$  هدایت هیدرولیکی غیراشباع است.

برای تعیین ضریب هدایت هیدرولیکی نسبی، روابط ریاضی متعددی ارائه شده است. روابط ریاضی این مزیت را دارند که استفاده از آنها در مدل‌های عددی ساده‌تر می‌باشد. در مدل حاضر برای تعیین ضریب هدایت هیدرولیکی نسبی از رابطه‌ای که توسط وان گنوختن (۱۴) ارائه شده است، استفاده گردید:

$$K_{rw} = S_e^2 \left[ 1 - \left( 1 - S_e^m \right)^m \right]^2 \quad [5]$$

روش عملگرهای مرجع مزیت اصلی روش عملگرهای مرجع، که عموماً توسط دانشمندان روسی بسط داده شده (۹ و ۱۰)، در استفاده از شبکه نامنظم است، که امکان مدل کردن محیط‌های با مرز نامنظم را



شکل ۱. شبکه نامنظم مورد استفاده در روش عملگرهای مرجع

که مقدار  $VN_i$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\left. \frac{\partial}{\partial z} \left( K \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right|_{z_i} = \frac{1}{VN_i} \left[ K_i \left( \frac{u(z_{i+1}) - u(z_i)}{z_{i+1} - z_i} \right) - K_{i-1} \left( \frac{u(z_i) - u(z_{i-1})}{z_i - z_{i-1}} \right) \right] \quad [13]$$

$$VN_i = \begin{cases} \frac{z_i - z_1}{2} & \text{اگر } i=1 \\ \frac{z_{i+1} - z_{i-1}}{2} & \text{اگر } i=2, \dots, M-1 \\ \frac{z_M - z_{M-1}}{2} & \text{اگر } i=M \end{cases} \quad [10]$$

با استفاده از روابط به دست آمده فوق و جای‌گزین کردن آنها در معادله ۱ خواهیم داشت:

$$\frac{1}{VN_i} \left[ K_i \left( \frac{h_{i+1}^{n+1} - h_i^{n+1}}{z_{i+1} - z_i} \right) - K_{i-1} \left( \frac{h_i^{n+1} - h_{i-1}^{n+1}}{z_i - z_{i-1}} \right) \right] + \frac{1}{VN_i} (K_i - K_{i-1}) = C(h) \frac{h_i^{n+1} - h_i^n}{\Delta t} + q_i \quad [14]$$

که در آن  $\Delta t$  گام زمانی بوده، و  $n$  اندیس مربوط به زمان می‌باشد.

### نتایج و بحث

به طور کلی مدل باید قبل از استفاده ارزیابی شده و نه تنها قابلیت‌های آن مشخص شود، بلکه محدودیت‌های آن نیز تعیین

برای مشتق مرتبه دوم، با استفاده از روابط به دست آمده، و با کمک گرفتن از بسط سری تیلور می‌توان نوشت:

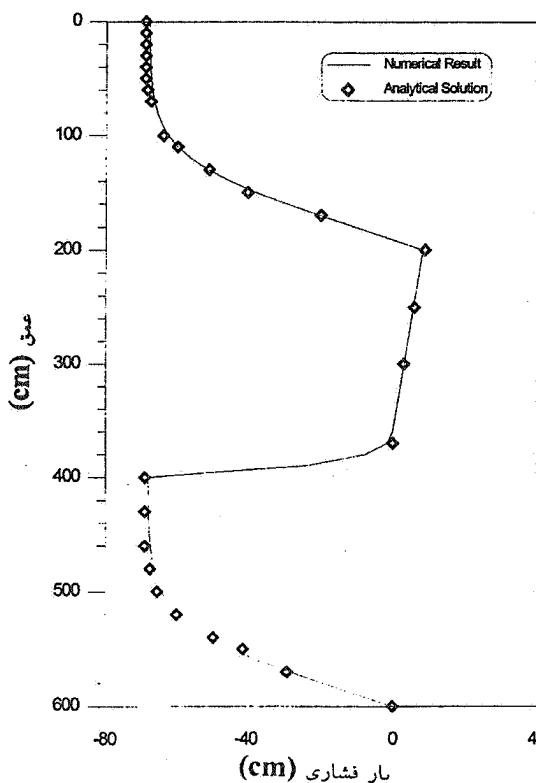
$$\frac{\partial W}{\partial z} = W \left( \frac{z_{i+1} + z_i}{2} \right) \quad [11]$$

$$\left. \frac{dW}{dz} \right|_{z_i} = \frac{1}{VN_i} (W_i - W_{i-1}) + O(h) \quad [12]$$

که در آن  $O(h)$  خطای مرتبه اول قطع کردن در سری تیلور می‌باشد، و  $W$  یک تابع مشتق مرتبه اول است. بنابراین، برای جمله  $\frac{\partial}{\partial z} \left( K \frac{\partial u}{\partial z} \right)$  در معادله انتقال حرارت می‌توان نوشت:

جدول ۱. ویژگی های فیزیکی خاک ها در مثال ۱ و ۲

$\theta_r$	$\theta_s$	n	$\alpha$ cm <sup>-1</sup>	K (cm/s)	نوع خاک
۰/۰۲۸۶	۰/۳۶۵۸	۲/۲۳۹۰	۰/۰۲۰۸	۶/۲۶×۱۰ <sup>-۳</sup>	لومی شنی ریز
۰/۱۰۶۰	۰/۴۶۸۶	۱/۳۹۵۴	۰/۰۱۰۴	۱/۵۲×۱۰ <sup>-۴</sup>	لوم رسی سیلتی



شکل ۲. مقایسه حل تحلیلی با نتایج مدل در مثال ۱

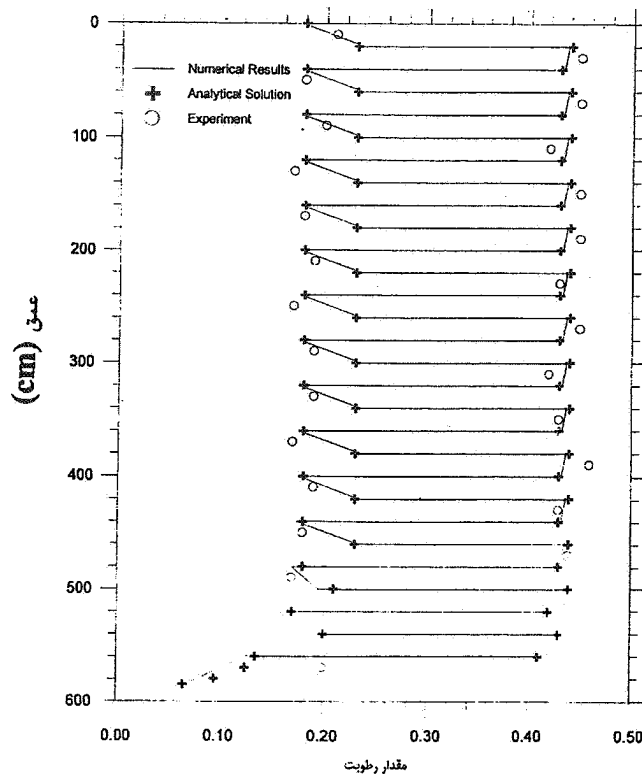
اندازه گیری ها با حل تحلیلی و نتایج مدل عددی در شکل های ۳ و ۴ نمایش داده شده است. مشخصات دو نوع خاک همانند مثال اول بوده، و تنها ضریب  $\alpha$  برای خاک لومی شنی ریز برابر ۰/۰۲۸ می باشد.

با در نظر گرفتن خطاهایی که معمولاً در هنگام اندازه گیری رطوبت وجود دارد، و همین طور عدم اطمینان به تطابق پارامترهای انتخاب شده در مدل با واقعیت، می توان گفت که مقادیر اندازه گیری شده و مدل، نتایج نسبتاً نزدیکی را نشان می دهند، و نتایج مدل به حل تحلیلی بسیار شبیه است.

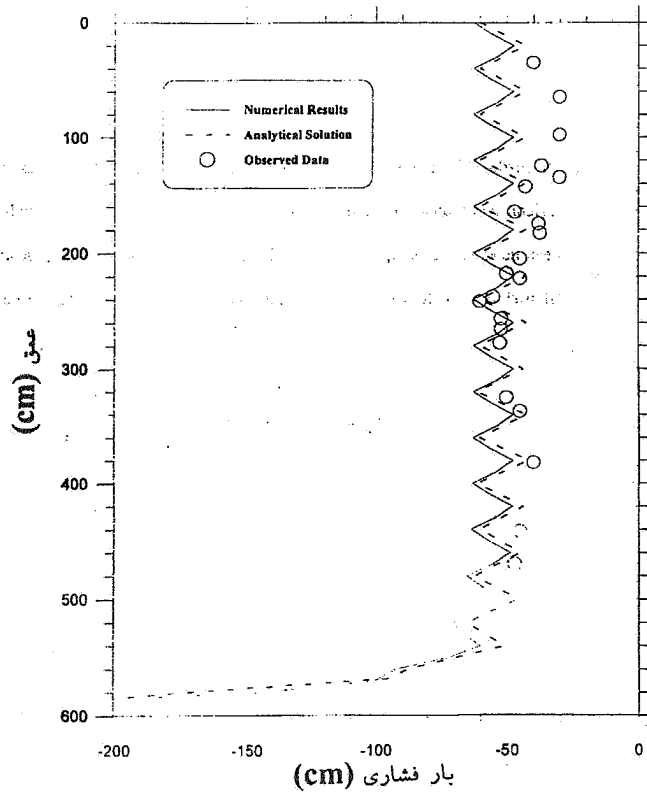
گردد. برای اثبات این که مدل حاضر می تواند جواب های صحیح ارائه دهد، لازم است با حل تحلیلی مقایسه شود. در این مقاله، راه حل مدل با یک حل تحلیلی، و با نتایج یک آزمایش فیزیکی مقایسه می گردد.

مورد اول جریان ماندگار آب در حالت یک بعدی عمودی و در راستای قائم بوده، و شامل یک ستون خاک به ارتفاع شش متر است، که از سه لایه تشکیل شده و ضخامت هر لایه دو متر می باشد. جدول ۱ ویژگی های فیزیکی خاک های مورد استفاده را نشان می دهد (۸). لایه لوم رسی سیلتی<sup>۱</sup> در وسط دو لایه لومی شنی ریز<sup>۲</sup> واقع گردیده است. مرز بالا را یک جریان ورودی ثابت آب با شدتی برابر  $۱/۶ \times 10^{-4}$  سانتی متر در ثانیه، و مرز پایین را بار فشاری صفر تشکیل می دهد. حل تحلیلی این مثال فرضی توسط راک هولد و همکاران (۸) ارائه شده است. در حل عددی بر اساس معادله ۱۴، ستون خاک به ۶۰ سلول ۱۰ سانتی متری تقسیم گردید. شکل ۲ توزیع بار فشاری و مقایسه آن با نتایج حل تحلیلی را نشان می دهد، که بیانگر هم خوانی خوب بین این دو نتیجه می باشد.

مورد دوم مربوط به مقایسه بین مدل و یک آزمایش فیزیکی است، که توسط ویرنگا و همکاران (۱۵) در آزمایشگاه جورنادا<sup>۳</sup> در نیومکزیکو انجام یافته، و نیز مقایسه با حل تحلیلی معادلات مربوط به آزمایش می باشد. یک لیسیمتر به عمق ۵/۸۵ متر، که توسط لایه هایی به ضخامت ۲۰ سانتی متر به طور یک در میان از دو نوع خاک پر شده بود، با سرعت  $۲/۳۸ \times 10^{-5}$  سانتی متر در ثانیه آبیاری گردید. مقدار رطوبت خاک و بار فشاری آب در داخل لیسیمتر، به طور مرتب توسط یک رطوبت سنج نوترونی و تانسیمتر اندازه گیری شد. مقایسه



شکل ۳. مقایسه مقدار رطوبت بین نتایج مدل، حل تحلیلی و آزمایش



شکل ۴. مقایسه بار فشاری بین نتایج مدل، حل تحلیلی و آزمایش

## نتیجه‌گیری

قابلیت استفاده از روش تفاضل محدود در روی یک محیط با مرزهای نامنظم، و استفاده از شبکه چهارضلعی‌های غیرمربع یا مستطیل دویعدی، از مزایای اصلی این روش است. مدل ارائه شده توانست با موفقیت حرکت یک‌بعدی آب در محیط غیراشباع را شبیه‌سازی کند. این مدل را می‌توان برای حالت دویعدی نیز تعمیم داد.

روش عملگرهای مرجع، که یک روش تفاضل محدود ولی با عمومیت بیشتر می‌باشد، در این مقاله معرفی گردید. این روش که توسط دانشمندان روسی بسط یافته است، فقط در حیطه ریاضیات باقی مانده بود؛ مدل تهیه شده یکی از اولین کاربردهای عملی این روش در شاخه مهندسی آب می‌باشد.

## منابع مورد استفاده

1. Brooks, R. J. and A. T. Corey. 1964. Hydraulic properties of porous media. Hydro. Paper 3, Colorado State University, Fort Collins.
2. Buckingham, E. 1970. Studies on the movement of soil moisture. USDA Bur. Soils Bull. 38.
3. Denisov, A. A., A. V. Koldoba and Y. A. Poveshchenkov. 1989. The convergence to generalized solutions of difference schemes of the reference-operator method for Poisson's equation. USSR Comput. Math. and Math. Phys. 29(2): 32-38.
4. Favorskii, A. P., V. F. Tishkin and M. Shashkov. 1979. Variational difference schemes for the heat conduction equation on non-regular grids. Sov. Phys. Dokl. 24(6): 446. American Institute of Physics.
5. Feddes, R. A., P. Kabat, P. J. T. Van Bakel, J. J. B. Bronswijk and J. Halbertsma. 1988. Modelling soil water dynamics in the unsaturated zone-state of the art. J. Hydr. 69: 100-111.
6. Leverett, M. C. 1941. Capillary behavior in porous solids. Trans. AIME 142: 152-169.
7. Richards, L. A. 1931. Capillary condition of liquids through porous mediums. Physics 1: 318-333.
8. Rockhold, M. L., C. S. Simmons and M. J. Fayer. 1997. An analytical solution technique for one-dimensional, steady vertical flow in layered soils. Water Resour. Res. 33(4): 897-902.
9. Samarskii, A. A., V. F. Tishkin, A. P. Favorskii and M. Shashkov. 1981. Operational finite difference schemes. Diff. Eqns. 17(7): 854-862.
10. Samarskii, A. A., V. F. Tishkin, A. P. Favorskii and M. Shashkov. 1982. Employment of the reference-operator method in the construction of finite difference analogs of tensor operations. Diff. Eqns. 18(7): 881-885.
11. Shashkov, M. and S. Steinberg. 1995. Support-operator finite difference algorithms for general elliptic problems. J. Comput. Physics 118: 131-151.
12. Shashkov, M. 1996. Conservative Finite Difference Methods on General Grids. CRC Press, New York.
13. Van der Heijde, P. K. M., P. S. Huyakorn and J. W. Mercer. 1984. Testing and validation of groundwater models. Proc. Practical Applications of Groundwater Modeling, NWWA/IGWMC Conference, Columbus, OH, USA.
14. Van Genuchten, M. 1980. A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils. Soil. Soc. Am. J. 44: 892-899.
15. Wierenga, P. J., D. Bachelet, J. R. Bilsjje, D. B. Elabd, D. B. Hudson, M. Nash, I. Porro, W. R. Strong, A. Toorman and J. Vinson. 1988. Validation of stochastic flow and transport models for unsaturated soils. Res. Rep. 88-SS-03, New Mexico St. Univ., Las Cruces, USA.