

## مقایسه‌ی روش‌های محاسبه بعد فرکتال بافت و انتخاب روش مناسب:

### مطالعه موردی در خاک‌های طاقانک، شهرکرد

حبیب بیگی هرچگانی<sup>۱\*</sup> و گلنوش بنی طالبی<sup>۱</sup>

(تاریخ دریافت: ۱۳۹۱/۱۰/۲۷؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۲/۸/۲۰)

#### چکیده

بعد فرکتال ذرات بافت خاک شاخص فیزیکی مناسبی برای توصیف توزیع اندازه‌ی ذرات خاک بوده و کاربردهای گوناگونی دارد. محاسبه‌ی بعد فرکتال می‌تواند به چند روش و با دو گزینه‌ی برازش خطی و غیر خطی صورت گیرد. هدف از مطالعه‌ی حاضر مقایسه و انتخاب روش مناسب برای تعیین بعد فرکتال با استفاده از داده‌های هیدرومتری با روابط جرم-زمان، جرم-قطر و روش تعدیل شده‌ی جرم-قطر (کرچنکو-ژانگ) است. به همین منظور ۶۰ نمونه خاک از چهار مزرعه واقع در طاقانک، شهرکرد، جمع‌آوری و پس از تیمار نمونه‌ها با آب اکسیژنه، قرائت هیدرومتر در دقایق ۶۷/۰، ۱، ۲، ۵، ۱۵، ۳۰، ۶۰، ۱۲۰، ۱۸۰، ۱۴۴۰ و ۲۸۸۰ انجام شده، سپس به داده‌های جرم-زمان، و جرم-قطر تبدیل و بعد فرکتال ذرات جامد بافت خاک با برازش خطی و غیرخطی سه رابطه‌ی فوق‌الذکر تعیین شد. برازش غیرخطی روش کرچنکو و ژانگ به دلیل ضریب تبیین بالاتر و میانگین مربعات خطا کمتر و معیار اطلاعاتی آکائیکه کوچک‌تر به‌عنوان مناسب‌ترین روش محاسبه‌ی بعد فرکتال ذرات بافت انتخاب شد. تجزیه و تحلیل خطا نیز موید این روش است. بین بعد فرکتال حاصل از برازش خطی و غیرخطی در دو روش جرم-قطر و جرم-قطر کراچنکو-ژانگ رابطه‌ی معنی‌دار ولی نه‌چندان قوی مشاهده شد. از این روابط می‌توان برای تصحیح بعد فرکتال تعیین شده در مطالعات قبلی استفاده نمود.

واژه‌های کلیدی: برآورد خطی و غیرخطی، توزیع اندازه‌ی ذرات، تصحیح بعد فرکتال، جرم-زمان، جرم-قطر، کرچنکو-ژانگ

۱. گروه علوم خاک، دانشگاه شهرکرد، شهرکرد

\*: مسئول مکاتبات، پست الکترونیکی: beigi.habib@gmail.com

## مقدمه

بسیاری از ویژگی‌های خاک به صورت مستقیم و غیرمستقیم تحت تأثیر توزیع اندازه‌ای ذرات خاک است. بعد فرکتال شاخص مناسبی برای درک بهتر و بیان چگونگی این ویژگی با حداقل تعداد مؤلفه‌های مورد نیاز برای تعیین آن است (۶ و ۷). مقدار نظری این شاخص بین صفر تا ۳ تغییر می‌کند. بعد فرکتال بافت خاک با افزایش درصد رس و گاهی سیلت خاک به صورت غیرخطی افزایش و با افزایش درصد شن خاک به صورت خطی کاهش می‌یابد (۱۹).

از بعد فرکتال بافت خاک می‌توان (الف) برای ارزیابی تخریب و کیفیت ساختمان خاک در اثر کاربری‌های مختلف (۲۱ و ۲۳)، (ب) بررسی پایداری خاکدانه تحت شرایط متفاوت خاکورزی (۱۰)، (ج) تخلخل و نفوذپذیری خاک (۱۲)، (د) تعیین سطح ویژه‌ی خاک (۱۷)، (ه) برآورد منحنی رطوبتی (۹) و (و) برآورد هدایت آبی اشباع (۲ و ۱۳) استفاده نمود. صحت و کاربرد تئوری فرکتال توزیع اندازه‌ای ذرات خاک هنوز به عنوان هدفی برای تحقیق توسط پژوهشگران دنبال می‌شود (۸).

بعد فرکتال بافت خاک را می‌توان به صورت توابع: جرم ذرات کوچک‌تر از یک اندازه‌ی مشخص در مقابل زمان (۷)، جرم ذرات کوچک‌تر از یک اندازه‌ی مشخص در مقابل قطر (۷ و ۸) و روش تعدیل شده‌ی جرم- قطر که در اینجا به نام کرچنکو و ژانگ نام گذاری شده است (۹) تعیین نمود (۸). این توابع در اصل به شکل توانی و غیرخطی بوده و می‌توان آنها را با استفاده از رگرسیون غیرخطی به داده‌ها برازش و بعد فرکتال را تعیین نمود. معمولاً توابع مذکور با لگاریتم‌گیری از طرفین به صورت خطی در آمده و با استفاده از رگرسیون خطی ساده بعد فرکتال خاک استخراج می‌شود. با این حال، اختلاف بر سر انتخاب برازش خطی و غیرخطی این روابط برای تعیین بعد فرکتال هنوز باقی است (۸).

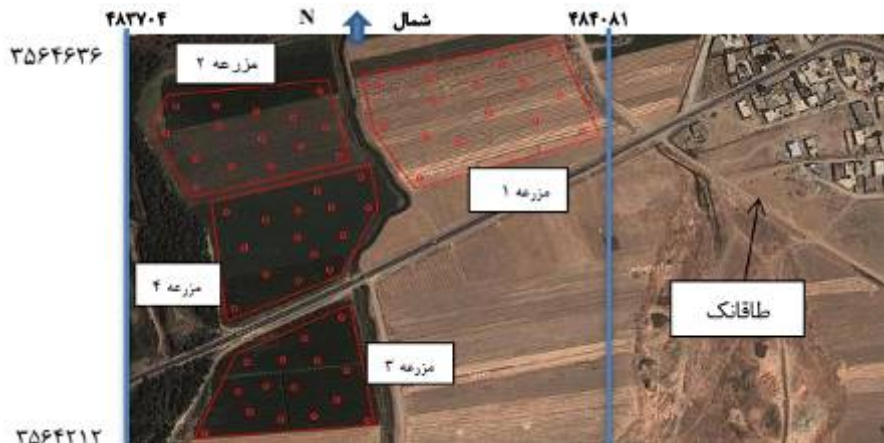
برخی آماردانان با خطی کردن روابط غیرخطی به منظور برازش خطی مخالف هستند زیرا معتقد هستند که این تبدیل علاوه بر برآورد نادرست ضرایب، احتمالاً، توزیع خطا را هم دچار تغییر

می‌کند. راضیه و همکاران (۱۵) در تعیین بعد فرکتال خاکدانه‌ها نشان دادند که اولاً در برآورد خطی، در ۹۸ درصد مقادیر بزرگ‌تر از برآورد غیرخطی بود و ثانیاً فقط توزیع خطاهای حاصل از برازش خطی در مقابل اندازه‌ی خاکدانه تصادفی تقریباً متقارن و نرمال بود درحالی‌که در برازش غیرخطی این چنین نبود. راضیه و بیدربک (۱۴) گزارش دادند که بعد فرکتال خاکدانه حاصل از برازش غیرخطی کوچک‌تر و دقیق‌تر از فرکتال حاصل از برازش خطی است. درحالی‌که پیرمادیان و همکاران (۱۰) در ارزیابی پایداری خاکدانه‌های خاک‌های آهکی مناطق خشک، برآورد خطی بعد فرکتال را قابل قبول‌تر از برآورد غیرخطی آن دانستند زیرا در برازش غیرخطی گاهی مقدار بعد فرکتال بزرگ‌تر از ۳ می‌شد که با تئوری فرکتال سازگار نیست.

استفاده از روابط سه‌گانه‌ی موجود برای تعیین فرکتال منجر به تفسیرهای متفاوتی از آن می‌شود. بنابراین مشخص نمودن نوع رابطه‌ی مورد استفاده برای تعیین بعد فرکتال ضروری است (۸). علاوه بر این پژوهشگران مختلف نشان داده‌اند که در بعضی موارد نتایج بعد فرکتال حاصل از برازش خطی (۸ و ۱۲) و در بعضی موارد بعد فرکتال حاصل از برازش غیرخطی (۱۴ و ۱۵) قابل قبول است. به نظر می‌رسد که تاکنون تناسب برازش غیرخطی یا خطی در تعیین بعد فرکتال بافت، برخلاف بعد فرکتال خاکدانه‌ها، مورد توجه قرار نگرفته است. به‌ویژه آن‌که برخلاف مطالعات خارجی عموماً در تعیین بافت در ایران حذف کربنات‌های کلسیم خاک انجام نمی‌شود و پیامدهای این عدم حذف بر بعد فرکتال بافت خاک کاملاً شناخته شده نیست (۳). هدف از مطالعه حاضر (الف) تعیین بعد فرکتال توزیع اندازه‌ی ذرات خاک با استفاده از داده‌های هیدرومتری به سه روش جرم- زمان، جرم-قطر و روش تعدیل شده‌ی جرم-قطر (کرچنکو و ژانگ) و (ب) مقایسه برآورد خطی و غیرخطی بعد فرکتال توزیع اندازه‌ی ذرات جامد خاک با استفاده از تجزیه و تحلیل خطاها در چهار مزرعه‌ی واقع در منطقه‌ی طاقانک شهرکرد است.

## مواد و روش‌ها

این مطالعه در چهار مزرعه انتخابی از مزارع طاقانک واقع در



شکل ۱. کروکی چهار مزرعه واقع شده در منطقه طاقانک. علامت O محل تقریبی نقاط نمونه‌برداری است

ذرات به میلی‌متر و  $D_g$ ،  $N$  و  $M$  ضرایب معادله است. درصد‌های شن، رس و سیلت نمونه‌های خاک از این منحنی استخراج شد.

#### محاسبه بعد فرکتال به روش جرم-زمان:

در این روش ابتدا داده‌های هیدرومتری (قرائت-زمان) به داده‌های کسر تجمعی جرم-زمان تبدیل شد (۱). برای محاسبه‌ی بعد فرکتال به روش جرم-زمان از رابطه‌ی تقریبی زیر استفاده شد (۷ و ۸).

$$M(r < R) / M_T \approx \left( \frac{r-D}{2L} \right)^{\frac{r-D}{2}} / \left( \frac{R-D}{2L} \right)^{\frac{r-D}{2}} \cdot R_U^{3-D} \cdot t^{(D-3)/2} \quad [2]$$

که در آن:  $M(r < R)$  جرم ذرات خاک با شعاع کمتر از  $R$ ،  $M_T$  جرم کل ذرات خاک با شعاع کمتر از  $R_U$ ،  $R_U$  بالاترین شعاع ذرات با رفتار فراکتالی،  $L$  و  $B$  ثابت،  $t$  زمان و  $D$  بعد فرکتالی ذرات است.

با لگاریتم‌گیری از دو طرف رابطه‌ی بالا رابطه‌ی خطی زیر به دست می‌آید (۷ و ۸):

$$\log \log (M(r < R) / M_T) \approx \log \left( \frac{r-D}{2L} \right)^{\frac{r-D}{2}} / \left( \frac{R-D}{2L} \right)^{\frac{r-D}{2}} \cdot R_U^{3-D} + \frac{D-3}{2} \cdot \log(t) \quad [3]$$

بعد فرکتال از شیب این خط استخراج شد.

۱۷ کیلومتری جنوب شهرکرد انجام شد. این چهار مزرعه که نزدیک به یکدیگر واقع شده‌اند (شکل ۱) بین طول‌های  $50/827075$  و  $50/831068$  درجه و عرض‌های  $32/214387$  تا  $32/218218$  درجه قرار دارند. از هر یک از مزارع فوق‌الذکر ۱۵ نمونه‌ی خاک به طور تصادفی برداشت شد. نمونه‌ها پس از هواخشک شدن و کوبیدن و از الک ۲ میلی‌متری عبور داده شدند. جرم ویژه‌ی حقیقی هر نمونه با استفاده از پیکنومتر در آزمایشگاه تعیین شد.

#### تعیین توزیع اندازه‌ی ذرات خاک:

توزیع اندازه‌ی ذرات (اجزای کوچک‌تر از ۲ میلی‌متر) به روش هیدرومتری و به صورت زیر انجام شد: ابتدا مواد آلی توسط آب آکسیژنه‌ی ۳۷ درصد حذف و سپس نمونه‌ها با کالگون ۵ درصد و همزن الکتریکی تیمار شدند و در زمان‌های ۰/۶۷، ۱، ۲، ۵، ۱۵، ۳۰، ۶۰، ۱۲۰، ۱۸۰، ۱۴۴۰ و ۲۸۸۰ دقیقه با هیدرومتر  $152H$  قرائت شدند (۵). بنابراین بافت خاک بدون حذف کربنات‌های کلسیم خاک تعیین شد. داده‌های هیدرومتری با استفاده از جرم ویژه‌ی حقیقی نمونه‌ها و دما به داده‌های کسر جرم تجمعی-قطر تبدیل شدند (۱). منحنی دانه‌بندی خاک با برازش رابطه‌ی زیر به داده‌های جرم-قطر رسم شد (۵):

$$F(d) = [1 + D_g/d]^N \cdot M^{-1}, \quad M = 1 - 2/N \quad [1]$$

که در آن:  $F(d)$  کسر تجمعی ذرات (بین صفر تا ۱)،  $d$  قطر

$$\ln\left[\frac{M(r \leq R)}{M_T}\right] = \ln C \quad [8]$$

سپس بعد فرکتال با استفاده از رابطه‌ی زیر محاسبه شد که در آن  $b$  شیب خط فوق است:

$$b = (3D^2 - 13D + 14) / (D^2 - 5D + 4) + 1 \quad [9]$$

ریشه‌ی بزرگ‌تر این معادله‌ی درجه‌ی دوم همان بعد فرکتال خاک است (۱۷).

برای محاسبه‌ی بعد فرکتال روابط خطی (۳، ۶ و ۸) و روابط غیرخطی (۲، ۵ و ۷) به داده‌های هیدرومتری برازش داده شد. به منظور ارزیابی نیکویی برازش مدل‌های خطی و غیرخطی از سه معیار آماری ضریب تبیین ( $R^2$ )، میانگین مربعات خطا (MSE) و معیار اطلاعاتی آکائیکه (AIC) استفاده شد. ضریب تبیین ( $R^2$ ) و میانگین مربعات خطا (MSE) به‌طور مستقیم از نرم‌افزار استخراج و معیار اطلاعاتی آکائیکه (AIC) از رابطه‌ی زیر محاسبه شد:

$$AIC = n \cdot \ln(SSE) + 2 \cdot P \quad [10]$$

که در آن:  $n$  تعداد کل نقاط مورد استفاده در برازش مدل (در این جا  $n=11$ )،  $SSE$  مجموع مربعات خطا و  $P$  تعداد ضرایب مدل مورد استفاده است. برای مقایسه‌ی روش‌های مورد استفاده از آزمون LSD در  $\alpha=0/05$  استفاده شد. کلیه‌ی تجزیه و تحلیل‌های آماری در محیط نرم‌افزار STATISTICA ۱۰.۰ انجام شد (۱۸).

## نتایج و بحث

میانگین برخی از ویژگی‌های اندازه‌گیری شده در چهار مزرعه مورد مطالعه در جدول ۱ ارائه شده است. جرم ویژه‌ی حقیقی خاک چهار مزرعه مشابه یکدیگر است ( $P > 0/05$ ). عموماً، جرم ویژه‌ی حقیقی خاک همواره ثابت بوده و با تغییر مقدار تخلخل خاک تغییری نمی‌کند (۱۶). به‌طور میانگین خاک هر مزرعه ۷۰ درصد سیلت و ۲۰ درصد رس دارد بنابراین کلاس بافت خاک چهار مزرعه لوم سیلتی است. میانگین منحنی توزیع اندازه‌ی ذرات خاک‌های چهار مزرعه مورد مطالعه در شکل ۲ ارائه شده است. مشاهده می‌شود که منحنی‌های هر چهار مزرعه بر هم

## محاسبه بعد فرکتال به روش جرم-قطر:

در این روش ابتدا داده‌های هیدرومتری به داده‌های کسر تجمعی جرم-قطر تبدیل شد. قطر ذرات در زمان‌های قرائت هیدرومتر از رابطه‌ی زیر محاسبه شد:

$$d = \sqrt{(30 \cdot v \cdot L) / (980 \cdot (\rho_s - \rho_w) \cdot t)} \quad [4]$$

که در آن:  $d$ : قطر ذره بر حسب میلی‌متر،  $L$  عمق موثر هیدرومتر بر حسب سانتی‌متر،  $v$  ویسکوزیته بر حسب سانتی‌پواز،  $\rho_s$  جرم ویژه‌ی حقیقی خاک بر حسب گرم بر سانتی‌مترمکعب،  $\rho_w$  چگالی آب و  $t$  زمان ته‌نشینی بر حسب دقیقه است. مشروح محاسبات این روش در سرشوق (۱) آمده است و در اینجا از تکرار آن پرهیز می‌شود. سپس برای محاسبه بعد فرکتال از رابطه‌ی زیر استفاده شد (۲۰):

$$M(r < R) / M_T = (R / R_U)^{3-D} \quad [5]$$

که در آن:  $M(r < R)$  جرم ذرات خاک با شعاع کمتر از  $R$ ،  $M_T$  جرم کل ذرات خاک با شعاع کمتر از  $R_U$ ،  $R_U$  بالاترین شعاع ذرات با رفتار فراکتالی،  $L$  و  $B$  ثابت،  $t$  زمان و  $D$  بعد فرکتالی ذرات است. با لگاریتم‌گیری از دو طرف معادله‌ی فوق رابطه‌ی خطی زیر حاصل می‌شود:

$$\log M(r < R) / M_T = (3 - D) \cdot \log(R / R_U) \quad [6]$$

با برازش رابطه‌ی فوق بعد فرکتال تعیین شد که همان شیب خط است.

## محاسبه بعد فرکتال با استفاده از رابطه‌ی کرچنکو و ژانگ (۹):

در این روش نیز از داده‌های جرم-قطر استفاده و از رابطه‌ی زیر بعد فرکتال محاسبه شد:

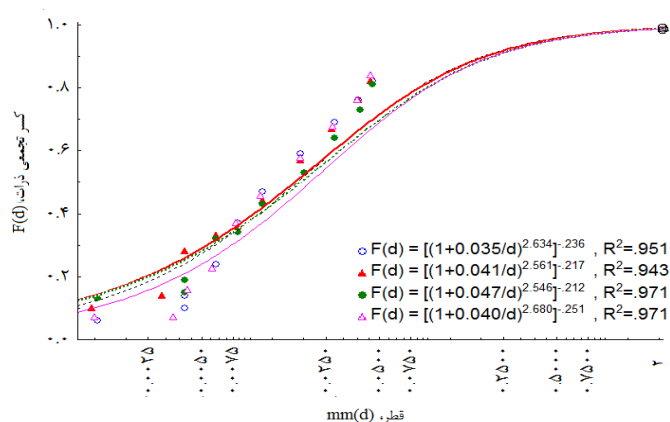
$$M(r \leq R) / M_T = C \cdot R^{(3D^2 - 13D + 14) / (D^2 - 5D + 4) + 1} \quad [7]$$

که در آن:  $M(r \leq R)$  جرم تجمعی ذرات خاک با شعاع کمتر از  $R$ ،  $M_T$  جرم کل ذرات خاک،  $R$  شعاع ذرات خاک،  $C$  ثابت و  $D$  بعد فرکتال است. با لگاریتم‌گیری از رابطه‌ی بالا (۷) رابطه‌ی خطی زیر حاصل می‌شود:

جدول ۱. مقایسه میانگین و خلاصه‌ی آماری بعضی ویژگی‌های فیزیکی خاک‌های چهار مزرعه مورد مطالعه

خلاصه‌ی آماری مزارع			میانگین هر مزرعه				ویژگی
بیشینه	میانگین	کمینه	۴	۳	۲	۱	
۲/۶۰	۱۵/۲	۱/۸۰	۲/۱۰ <sup>a</sup>	۲/۱۱ <sup>a</sup>	۲/۱۵ <sup>a</sup>	۲/۱۱ <sup>a</sup>	جرم ویژه حقیقی (Mg/m <sup>۳</sup> )
۲۷/۰	۶/۹	۰/۲	۸/۶ <sup>a</sup>	۱۱/۹ <sup>a</sup>	۱۰/۰ <sup>a</sup>	۷/۸ <sup>a</sup>	شن (%)
۸۷/۷	۹/۷۰	۵۵/۹	۷۳/۱ <sup>a</sup>	۶۸/۶ <sup>a</sup>	۶۹/۱ <sup>a</sup>	۷۲/۶ <sup>a</sup>	سیلت (%)
۳۴/۰	۶/۱۹	۰/۱	۱۸/۲ <sup>a</sup>	۱۹/۵ <sup>a</sup>	۲۰/۹ <sup>a</sup>	۱۹/۶ <sup>a</sup>	رس (%)
	لوم سیلتی (SiL)		لوم سیلتی (SiL)	لوم سیلتی (SiL)	لوم سیلتی (SiL)	لوم سیلتی (SiL)	کلاس بافت خاک

حروف کوچک یکسان انگلیسی در هر سطر نشان دهنده‌ی عدم معنی دار بودن تفاوت میانگین‌ها است (P>۰/۰۵).



شکل ۲. منحنی توزیع ذرات خاک‌های چهار مزرعه‌ی مورد مطالعه.

منحنی‌ها با برازش معادله‌ی  $F(d)=[1+D_p/d]^N \cdot (-1/2/N)$  به میانگین داده‌های بافت هر مزرعه رسم شده‌اند.

جدول ۲. بعد فرکتال به دست آمده به چهار روش جرم-زمان، جرم-قطر و کرچنکو و ژانگ در چهار مزرعه مورد مطالعه

مزرعه ۴	مزرعه ۳	مزرعه ۲	مزرعه ۱	برازش	رابطه
۲/۴۴ <sup>a</sup>	۲/۴۴ <sup>a</sup>	۲/۴۷ <sup>a</sup>	۲/۵۱ <sup>a</sup>	خطی	جرم-زمان
۲/۶۳ <sup>a</sup>	۲/۶۳ <sup>a</sup>	۲/۶۳ <sup>a</sup>	۲/۵۸ <sup>a</sup>	غیرخطی	
۲/۸۱ <sup>a</sup>	۲/۲۲ <sup>a</sup>	۲/۲۲ <sup>a</sup>	۲/۱۶ <sup>a</sup>	خطی	جرم-قطر
۲/۸۵ <sup>a</sup>	۲/۸۵ <sup>a</sup>	۲/۸۵ <sup>a</sup>	۲/۸۶ <sup>a</sup>	غیرخطی	
۲/۸۰ <sup>a</sup>	۲/۸۱ <sup>a</sup>	۲/۷۹ <sup>a</sup>	۲/۷۷ <sup>a</sup>	خطی	جرم-قطر (کرچنکو و ژانگ)
۲/۸۳ <sup>a</sup>	۲/۸۱ <sup>a</sup>	۲/۸۱ <sup>a</sup>	۲/۸۲ <sup>a</sup>	غیرخطی	

حروف کوچک مشابه انگلیسی در هر سطر نشان دهنده‌ی عدم وجود تفاوت در بین خاک چهار مزرعه است (P>۰/۰۵).

بعد فرکتال اندازه‌گیری شده حاصل از برازش خطی و غیرخطی به سه روش جرم-زمان، جرم-قطر و کرچنکو و ژانگ در چهار مزرعه‌ی مورد مطالعه را نشان می‌دهد. بین بعد فرکتال ذرات جامد خاک چهار مزرعه در یک روش و در یک نحوه‌ی برازش

منطبق هستند که به معنی مشابه بودن توزیع ذرات خاک‌های این چهار مزرعه است. بنابراین با توجه به جدول ۱ و شکل ۲ می‌توان گفت که بین بافت خاک این چهار مزرعه تفاوت معنی‌داری وجود ندارد (P>۰/۰۵). جدول ۲ میانگین مقادیر

جدول ۳. خلاصه آماری بعد فرکتال و آماره‌های کیفیت برازش به روش خطی و غیرخطی در سه روش محاسبه ( $n=60$ )

روش	برازش	کمینه	بیشینه	میانگین	خطای معیار	میانگین مربعات خطا (MSE)	ضریب تبیین ( $R^2$ )	معیار اطلاعاتی آکائیکه (AIC)
جرم-زمان	خطی	۲/۰۰	۲/۶۹	۲/۴۵	۰/۰۲	۰/۰۳	۰/۸۹	۱۴/۳
	غیرخطی	۲/۴۲	۲/۷۶	۲/۶۲	۰/۰۱	۰/۰۱	۰/۸۹	۱۸/۱
جرم-قطر	خطی	۲/۶۵	۲/۸۸	۲/۷۹	۰/۰۰۷	۰/۰۲	۰/۶۷	۱۴/۶
	غیرخطی	۲/۸۲	۲/۹۰	۲/۸۵	۰/۰۰۳	۰/۰۲	۰/۶۸	۱۶/۲
جرم-قطر	خطی	۲/۶۸	۲/۹۱	۲/۷۹	۰/۰۰۷	۰/۰۴	۰/۹۴	۱۲/۶
(کرچنکو و ژانگ)	غیرخطی	۲/۷۵	۲/۹۴	۲/۸۳	۰/۰۰۵	۰/۰۱	۰/۹۵	۲۸/۳

حروف کوچک و بزرگ متفاوت انگلیسی نشان‌دهنده تفاوت آماری در بین سه روش و نحوه‌ی برازش غیرخطی و خطی است ( $p < 0/05$ ).

به رابطه‌ی به‌کار رفته متفاوت است (جدول ۳،  $P < 0/05$ ). نتایج برخی از پژوهشگران نیز نشان داد که محاسبه‌ی بعد فرکتال تحت تأثیر نوع روش مورد استفاده برای تعیین این ویژگی قرار می‌گیرد (۲۲). برازش غیرخطی در هر سه روش مقادیر بزرگ‌تری نسبت به برازش خطی به‌دست می‌دهد. ( $p < 0/05$ ). این تفاوت در روش جرم-زمان بیشتر (به‌طور میانگین ۰/۱۷)، در روش جرم-قطر کمتر (به‌طور میانگین ۰/۰۶) و در روش جرم-قطر کرچنکو-ژانگ کمترین (به‌طور میانگین ۰/۰۴) است. کیفیت برازش یک رابطه در کاربرد آن اثرگذار و مهم است. این بدان معنی است که در بعضی موارد کاربرد یک رابطه و نحوه‌ی برازش می‌تواند به خطای کمتری منجر شود و به‌دنبال کاربرد آن، نتایج دقیق‌تری حاصل شود. به‌منظور مقایسه‌ی کیفیت برازش سه روش مورد استفاده برای تعیین بعد فرکتال، مقادیر ضریب تبیین، میانگین مربعات خطا و معیار اطلاعاتی آکائیکه توابع نیز در جدول ۳ ارائه شده است. خطای تخمین برازش غیرخطی کمتر از خطای تخمین برازش خطی است. راضیه و همکاران نیز گزارش کردند که خطای معیار برآورد غیرخطی بعد فرکتال کمتر از مقادیر نظیر در برآورد خطی آن بود (۱۵). علاوه بر این ضریب تبیین برازش غیرخطی اندکی بزرگ‌تر و AIC آن کوچک‌تر از مقادیر نظیر در برازش خطی است. برازش غیرخطی به رابطه‌ی جرم-قطر کرچنکو-ژانگ، در مجموع، خطای کمتر ( $SE = 0/005$  و  $MSE = 0/01$ )، بیشترین ضریب تبیین ( $R^2 = 0/95$ ) و کوچکترین معیار اطلاعاتی آکائیکه

تفاوتی وجود ندارد (جدول ۲،  $P > 0/05$ ). با توجه به داده‌های جدول ۱ و شکل ۲ چنین نتیجه‌ای انتظار می‌رفت. با این حال، در دو روش جرم-زمان و به‌ویژه جرم-قطر، نحوه‌ی برازش (رگرسیون خطی یا غیرخطی) ممکن است منجر به تفاوت‌آشکاری در مقدار بعد فرکتال یک خاک شود. نکته‌ی جالب این است که در روش کرچنکو-ژانگ نحوه‌ی برازش (غیرخطی و خطی) به مقدار بعد فرکتال مشابهی منجر می‌شود. از آنجایی که بین بعد فرکتال خاک چهار مزرعه، در هر روش و در هر نحوه‌ی برازش تفاوتی وجود ندارد ( $P > 0/05$ ). خلاصه آماری بعد فرکتال محاسبه شده حاصل از برازش خطی و غیرخطی روش‌های جرم-زمان، جرم-قطر و جرم-قطر کرچنکو-ژانگ تمام نمونه‌های خاک (صرف‌نظر از مزرعه) در جدول ۳ آورده شده است. دامنه‌ی مقادیر محاسبه شده‌ی بعد فرکتال به‌روش رگرسیون خطی و غیرخطی در تمامی سه روش مورد استفاده در محدوده‌ی (۲/۰۰-۲/۹۱) قرار دارد. این نتیجه نه تنها با نظریه‌ی فرکتال در علوم خاک مطابقت دارد بلکه با یافته‌های تجربی (۱، ۳، ۸ و ۱۷) نیز مطابقت دارد. اگرچه ممکن است در برخی مطالعات مقدار بعد فرکتال بیشتر از ۳ به‌دست آمده باشد (۱۰)، در این مطالعه هیچ‌گاه مقدار بعد فرکتال از حد تئوری آن یعنی ۳ عبور نکرده است. کمترین مقدار میانگین بعد فرکتال در برازش خطی به داده‌های جرم-زمان حاصل شده درحالی‌که برازش غیرخطی به‌همین داده‌ها مقادیر بزرگ‌تری با خطای کمتری تولید می‌کند. میانگین بعد فرکتال هم‌چنین بسته

غیرخطی برای هر روش در شکل ۶ آورده شده است. در روش جرم-قطر و کراچنکو-ژانگ مقادیر بعد فرکتال حاصل از برازش خطی و غیرخطی به صورت سیستماتیک هر چند نه چندان قوی به هم مربوط هستند ( $P < 0/05$ ). وجود رابطه‌ی بین بعد فرکتال حاصل از برازش غیرخطی و برازش خطی نشانه‌ی اریبی معنی‌دار و سیستماتیک در برآورد آن است. وقتی رابطه‌ی معنی‌داری بین بعد فرکتال حاصل از دو روش برازش وجود دارد می‌توان از طریق معادله یکی را به دیگری تبدیل کرد همان‌طوری که در کار راضیه و همکاران (۱۵) چنین رابطه‌ی مشاهده و نحوه‌ی تبدیل ارائه شده است. آنها در مطالعه‌ی بعد فرکتال خاکدانه‌ها دریافتند که بین بعد فرکتال حاصل از برازش خطی و غیرخطی رابطه‌ی به شکل  $p < 0/01$  وجود دارد که در آن  $D_{nl}$  و  $D_l$  به ترتیب بعد فرکتال حاصل از برازش غیرخطی و برازش خطی و اعداد نمایش داده شده در داخل پرانتز بیان‌گر خطای معیار هر ضریب است. در مطالعه‌ی حاضر روابط معنی‌دار زیر برای دو روش جرم-قطر و جرم-قطر کراچنکو-ژانگ به دست آمد:

[۱۱] برای رابطه‌ی کراچنکو-ژانگ

$$D_{nl} = 1/64(0/25) + 0/426(0/09) * D_l,$$

$$R^2 = 0/28, SE = 0/029 < 0/01 p$$

[۱۲] برای رابطه‌ی جرم-قطر

$$D_{nl} = 2/03(0/15) + 0/296(0/05) * D_l,$$

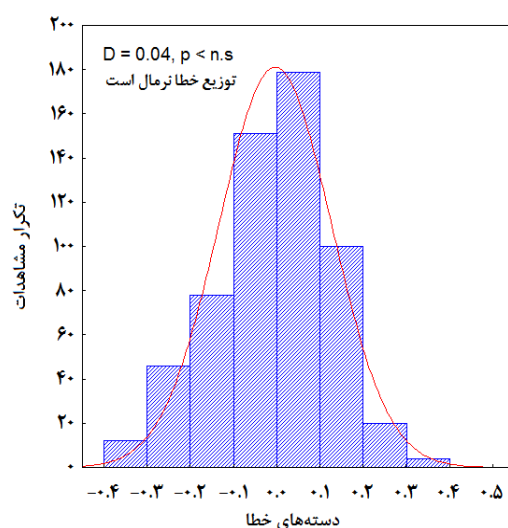
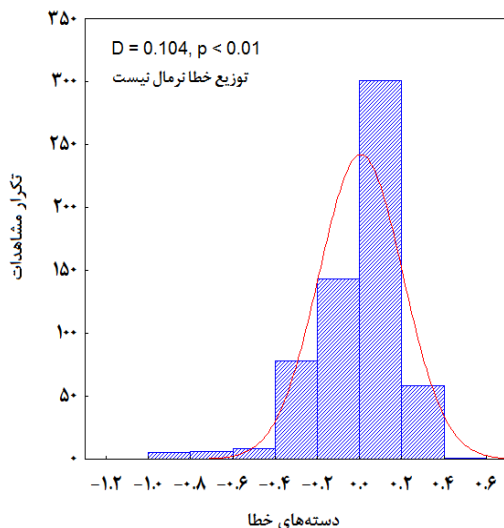
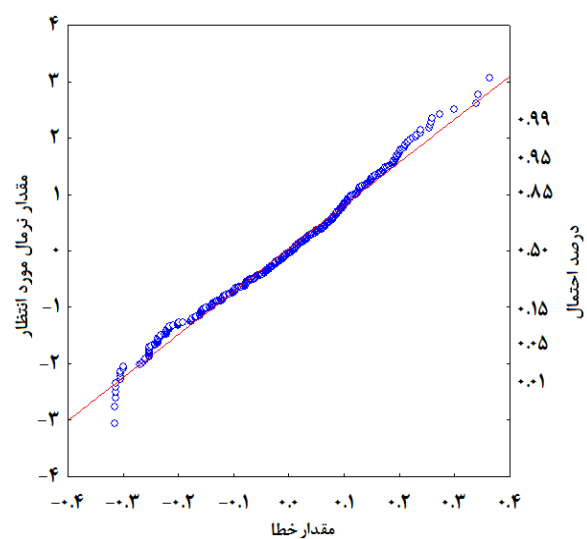
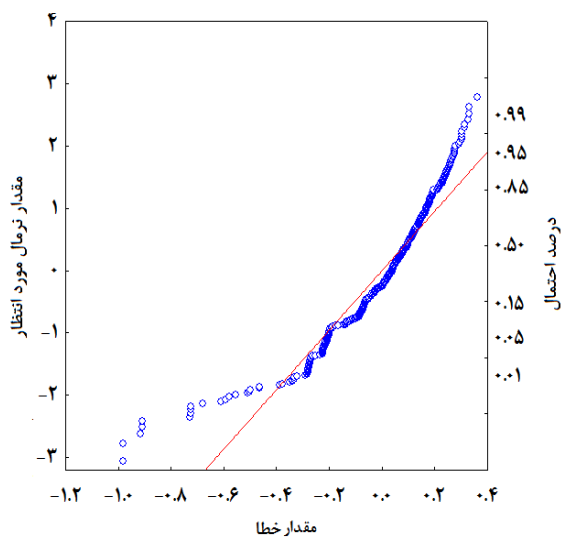
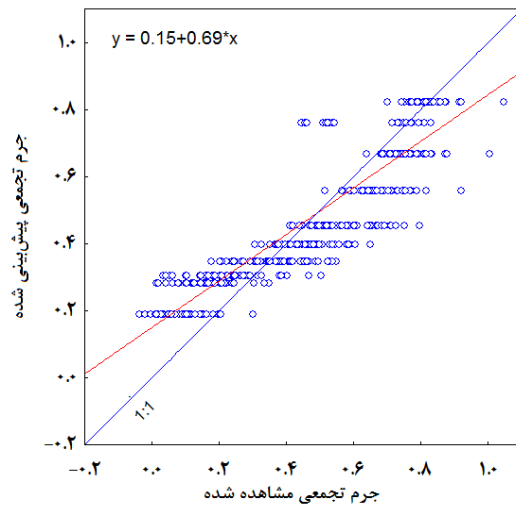
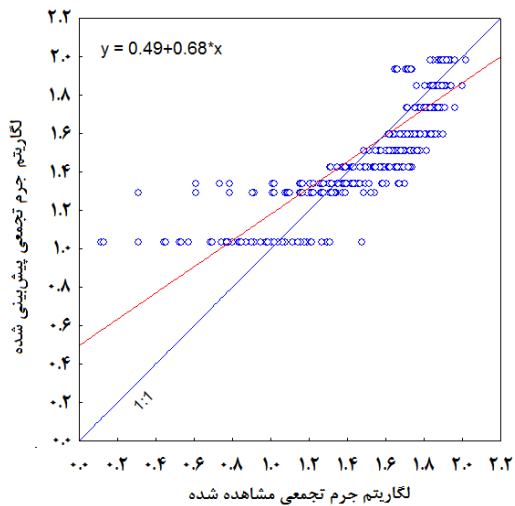
$$R^2 = 0/35, SE = 0/019 < 0/01 p$$

که در آن‌ها  $D_{nl}$  و  $D_l$  دارای تعریف قبلی بوده و اعداد داخل پرانتز نیز خطای معیار هر ضریب است. با استفاده از این روابط می‌توان بعد فرکتال حاصل از برازش خطی را تصحیح نمود. یادآوری می‌شود که میانگین بعد فرکتال حاصل از برازش غیرخطی رابطه‌ی جرم-قطر تفاوت معنی‌داری با بعد فرکتال حاصل از برازش غیرخطی رابطه‌ی کراچنکو-ژانگ ندارد (جدول ۳) و بنابراین خروجی معادله‌ی (۱۲) را می‌توان بعد فرکتال تلقی کرد.

( $AIC = -28/3$ ) را به دست می‌دهد. براین اساس می‌توان گفت این روش محاسبه‌ی بعد فرکتال بافت مناسب‌ترین روش است. راضیه و همکاران در تعیین بعد فرکتال خاکدانه، برازش غیرخطی را تنها به خاطر انحراف معیار کمتر برآورد بر برازش خطی ترجیح دادند (۱۴). در این جا، کمترین خطای معیار اختصاص به برازش غیرخطی دو روش جرم-قطر و سپس کراچنکو و ژانگ دارد.

نتایج تجزیه و تحلیل خطا در تعیین بعد فرکتال بافت به روش‌های جرم-زمان، جرم-قطر و جرم-قطر کراچنکو-ژانگ برای خاک‌های منطقه طاقانک در شکل‌های ۳ تا ۵ آورده شده است. عرض از مبدا و شیب خط مقادیر پیش‌بینی-مشاهده شده جرم تجمع ذرات در برازش خطی و غیرخطی هر سه روش تفاوت معنی‌داری با صفر و یک (ویژگی‌های خط ۱:۱) دارد (شکل‌های ۳، ۴ و ۵). مقایسه‌ی شکل‌های ۴ و ۵ نشان می‌دهد که مقادیر پیش‌بینی شده جرم در دو روش جرم-قطر مشابه و در مقایسه با روش جرم-زمان بسیار به خط ۱:۱ نزدیک‌تر است. با این حال کمترین عدول از خط ۱:۱ مربوط به برازش غیرخطی روش کراچنکو-ژانگ با خط رگرسیونی ( $y = 0/09 + 0/86x$ ) است (شکل ۵). عدول از خط ۱:۱ ناشی از خطای روش و نوع برازش مورد استفاده برای تعیین بعد فرکتال است. براساس نمودار احتمال نرمال، خطای برازش غیرخطی کراچنکو-ژانگ بهترین مقادیر مورد انتظار نرمال را در مقایسه با دو روش دیگر دارا است. به عبارت دیگر نمودار احتمال نرمال روش غیرخطی تناسب بیشتر این نوع برازش را بر برازش خطی نشان می‌دهد (شکل ۵). در روش‌های دیگر و حتی برازش خطی کراچنکو-ژانگ، خطاهای کم و زیاد (مقادیر انتهایی) از مقادیر مورد انتظار برای نرمال بودن انحراف دارند. هیستوگرام‌های توزیع خطا تنها در برازش غیرخطی جرم-زمان و کراچنکو-ژانگ با توزیع نرمال مطابقت دارند. در مجموع، تجزیه و تحلیل خطا حاکی از تناسب بیشتر برازش غیرخطی و سپس برازش خطی روش کراچنکو-ژانگ برای تعیین بعد فرکتال است.

رابطه‌ی بعد فرکتال بافت حاصل از برازش خطی و

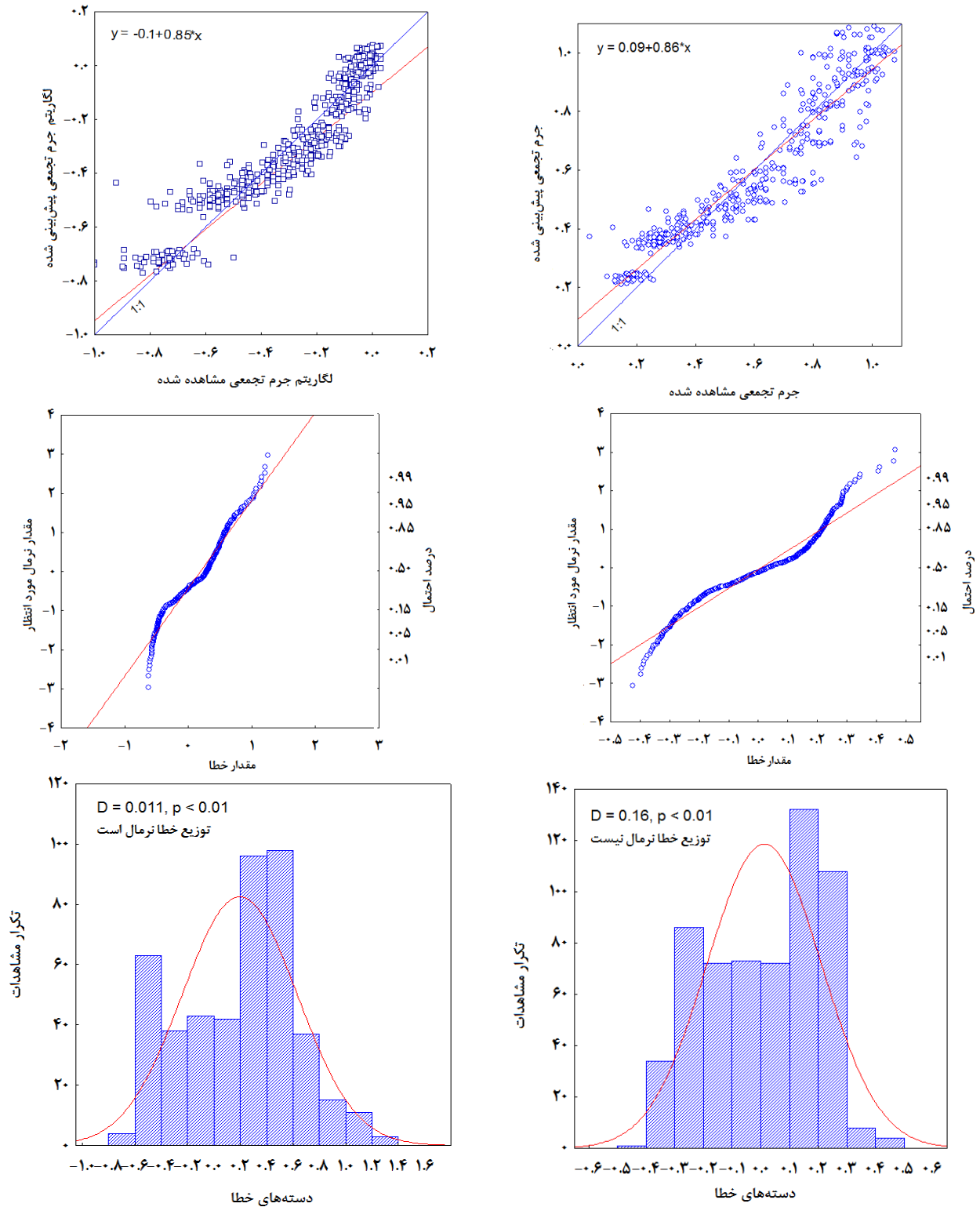


شکل ۳. تجزیه و تحلیل خطا در تعیین بعد فرکتال بافت به روش جرم-زمان خاک‌های منطقه‌ی طاقانک. سمت راست نمودار برآورد-

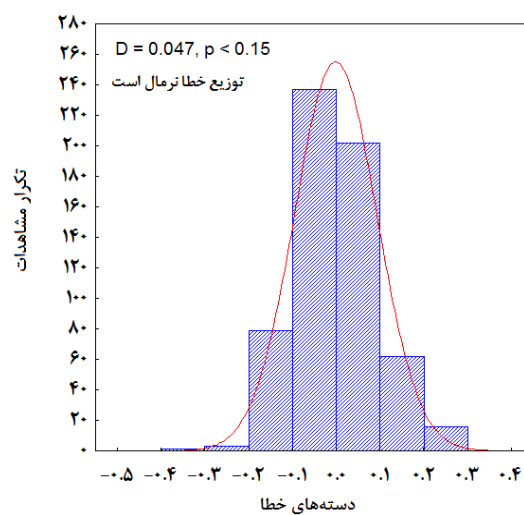
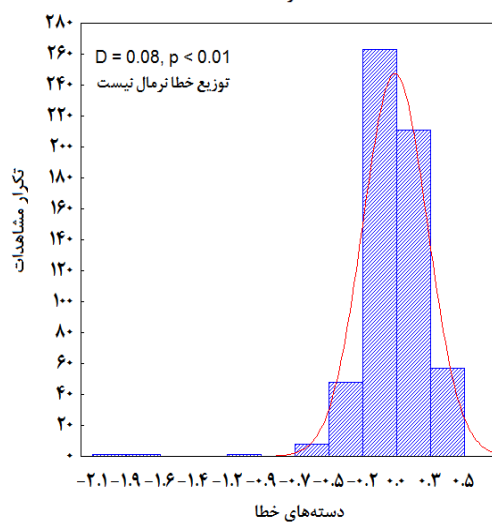
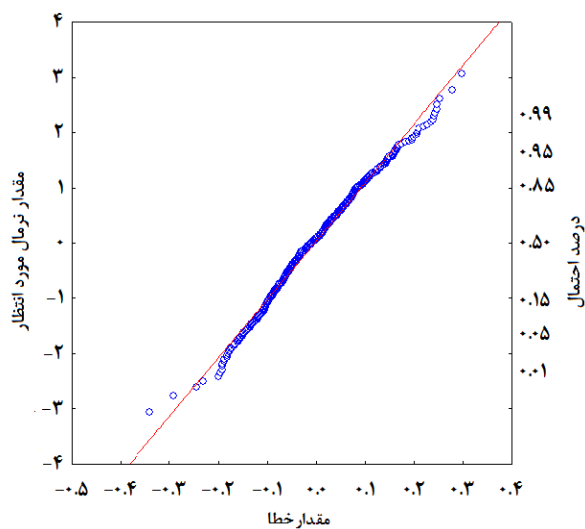
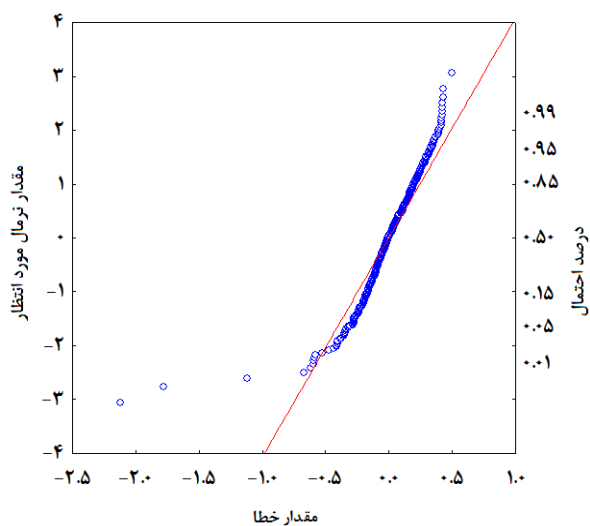
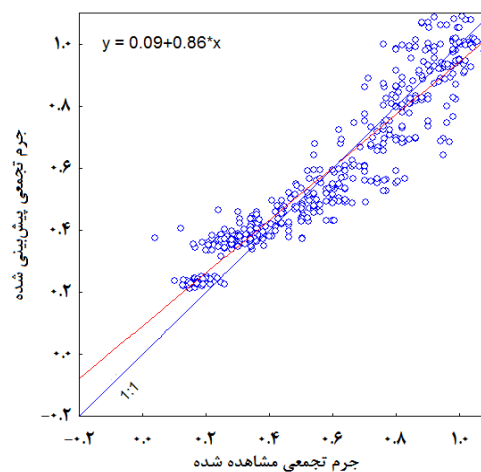
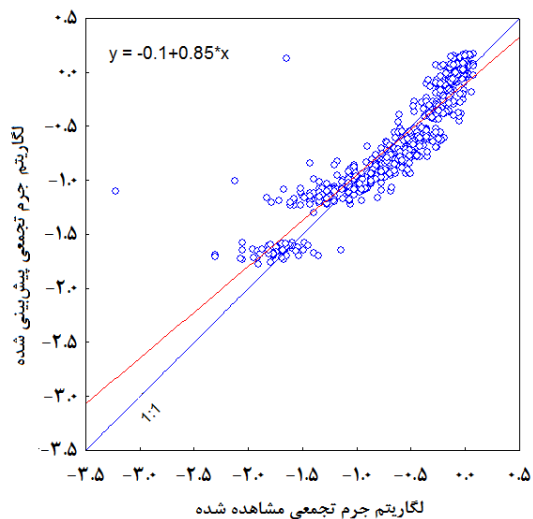
مشاهده، نمودار احتمال نرمال و هیستوگرام توزیع خطا در برازش غیرخطی. سمت چپ همین نمودارها برای برازش خطی. D

آماره‌ی کولموگروف-اسمیرنوف برای آزمون نرمال بودن توزیع داده‌ها است.

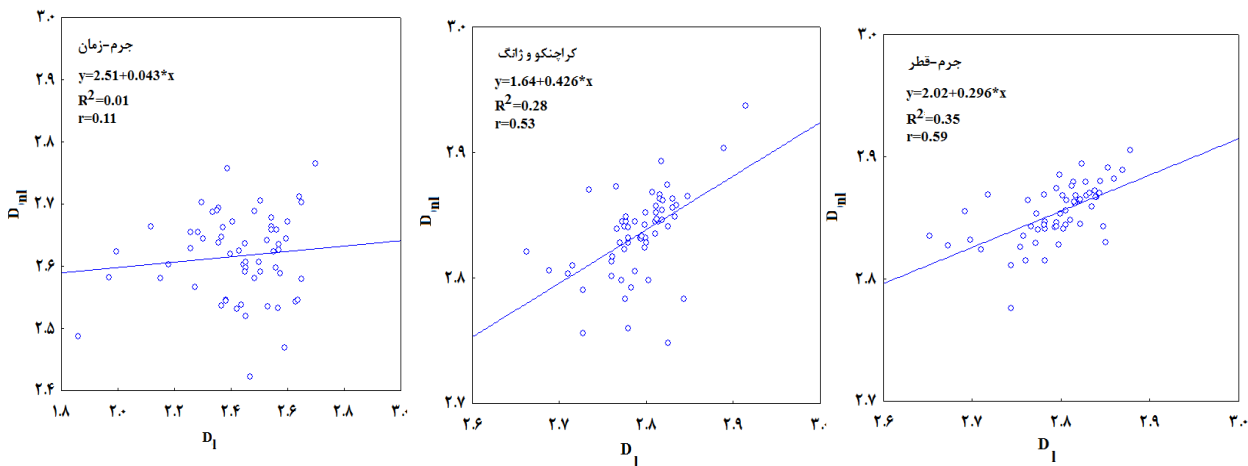




شکل ۴. تجزیه و تحلیل خطا در تعیین بعد فرکتال بافت به روش جرم-قطر در خاک‌های منطقه‌ی طاقانک. سمت راست نمودار برآورد-مشاهده، نمودار احتمال نرمال و هیستوگرام توزیع خطا در برازش غیرخطی. سمت چپ همین نمودارها برای برازش خطی. D آماره‌ی کولموگروف-اسمیرنوف برای آزمون نرمال بودن توزیع داده‌ها است.



شکل ۵. تجزیه و تحلیل خطا در تعیین بعد فرکتال بافت به روش جرم-قطر کرچنکو و ژانگ در خاک‌های منطقه‌ی طاقانک. سمت راست نمودار برآورد-مشاهده، نمودار احتمال نرمال و هیستوگرام توزیع خطا در برازش غیرخطی. سمت چپ همین نمودارها برای برازش خطی. D آماره‌ی کولموگروف-اسمیرنوف برای آزمون نرمال بودن توزیع داده‌ها است.



شکل ۶. رابطه‌ی بعد فرکتال حاصل از برازش غیرخطی ( $D_{nl}$ ) و برازش خطی ( $D_1$ )

در روش‌های جرم-زمان، جرم-قطر و کراچنکو-ژانگ

رابطه‌ی جرم-قطر تعیین شده باشد می‌توان آن را با رابطه‌ی [۱۱] به بعد فرکتال برازش غیرخطی تصحیح کرده و آن را معادل بعد فرکتال واقعی تلقی کرد.

صحت این نتیجه‌گیری و نتایج این پژوهش باید در خاک‌هایی با بافت متفاوت دیگر آزموده شود. ضمناً صحت بیشتر نتایج کار حاضر با به کارگیری مقادیر محاسبه شده‌ی  $D$  در توابع انتقالی ارزیابی شود. نتایج دیگر ما، که در این جا آورده نشده است، نشان می‌دهد که بعد فرکتال حاصل از روش کراچنکو و ژانگ در برآورد هدایت آبی اشباع خاک با استفاده از توابع انتقالی راولز و همکاران (۱۹۹۳) موفق عمل می‌کند.

## نتیجه‌گیری

طبق نتایج این پژوهش:

- براساس تجزیه و تحلیل خطا و دیگر آماره‌ها، برازش غیرخطی رابطه‌ی کراچنکو و ژانگ (۱۹۹۸) مناسب‌ترین روش برآورد بعد فرکتال بافت خاک بود.
- هرگاه از داده‌های هیدرومتری برای تعیین بعد فرکتال استفاده شود بایستی ابتدا داده‌ها را به داده‌های جرم-قطر تبدیل و سپس رابطه‌ی کراچنکو-ژانگ را به صورت غیرخطی برازش داد.
- اگر بعد فرکتال بافت خاک با برازش غیرخطی رابطه‌ی جرم-قطر تعیین شده باشد می‌توان آن را بعد فرکتال واقعی بافت خاک قلمداد کرد. ولی اگر بعد فرکتال با برازش خطی

## منابع مورد استفاده

۱. سرشوق، م. ۱۳۸۸. اثر جهت و موقعیت شیب بر تعدادی از ویژگی‌های مورفولوژی، فیزیکی، شیمیایی و کانی‌شناسی خاک‌های منطقه چلگرد استان چهارمحال و بختیاری. پایان‌نامه کارشناسی ارشد خاکشناسی، دانشکده کشاورزی، دانشگاه شهرکرد.
۲. شکاری، پ.، ی. عباسی، و ر. فخری. ۱۳۸۸. مقیاس‌بندی توزیع اندازه‌ی ذرات خاک به روش فرکتال یک بعدی. مجموعه مقالات یازدهمین کنگره علوم خاک ایران. ۲۱ تا ۲۴ تیر، دانشگاه گرگان، صفحات ۵۷۷ تا ۵۷۹.

۳. نبی‌زاده، ا. ۱۳۸۷. اثر حذف کربنات کلسیم بر بافت و مدل‌های توزیع اندازه‌ی ذرات خاک و تخمین ضرایب منحنی رطوبتی. پایان‌نامه کارشناسی ارشد خاکشناسی، دانشکده کشاورزی، دانشگاه شهرکرد.
۴. نبی‌زاده، ا.، و بیگی ح. ۱۳۹۰. کیفیت برآزش چند مدل تجربی منحنی رطوبتی به خاک های شهرستان لردگان از استان چهارمحال و بختیاری. مجله آب و خاک ۲۵(۳): ۶۳۴-۶۴۵.
5. Bagarello, V., G. Provenzano and A. Sgroi. 2009. Fitting particle size distribution models to data from Burundian soils for the BEST procedure and other purposes. *Soil Sci. Soc. Am. J.* 435-441.
6. Bittelli, M., G. S. Campbell and M. Flury. 1999. Characterization of particle-size distribution in soil with a fragmentation model. *Soil Sci. Soc. Am. J.* 63: 782-788.
7. Filgueira, R. R., Y. A. Pachepsky and L. L. Fournier. 2003. Time-mass scalling in soil texture analysis. *Soil Sci. Soc. Am. J.* 67: 1703-1706.
8. Filgueira, R. R., L. L. Fournier, I. C. Cecilia, P. Gelati and M. G. Garcia. 2006. Particle size distributions in soils: A critical study of the fractal model validation. *Geoderma* 134: 327-334.
9. Kravchenko, A. and R. Zhang. 1998. Estimating the soil water retention from particle size distribution: a fractal approach. *Soil Sci Soc. Am. J.* 163: 171-179.
10. Pirmoradian, N., A. R. Sepaskhah and M. A. Hajabbasi. 2005. Application of fractal theory to quantify soil aggregate stability as influenced by tillage treatment. *Biosystems Engineering* 20: 227-234.
11. Prosperini, N. and D. Perugini. 2008. Particle size distributions of some soils from umbria region (Italy): fractal analysis and numerical modeling. *Geoderma*. 145:185-195.
12. Perfect, E. 1999. Estimating soil mass fractal dimension from water retention curves. *Geoderma* 88: 221-231.
13. Rawls, W. J., D. L. Brakensiek and S. D. Logesdon. 1993. Predicting saturated hydraulic conductivity utilizing fractal principles. *Soil Sci Soc. Am. J.* 57: 1193-1197.
14. Rasiah, V. and V. O. Biederbeck. 1995. Fractal dimension of soil aggregation: influence of bulk density, fitting procedure and oily waste sludge incorporation. *Soil Sci. Soc. Am. J.* 160(4): 250-255.
15. Rasiah, V., E. Perfect. and B. D. Kay. 1995. Linear and nonlinear estimates of fractal dimension for soil aggregate fragmentation. *Soil Sci. Soc. Am. J.* 59:83-87.
16. Scott, D. 2000. *Soil Physics, agricultural and environmental applications*. Iowa University Press. Ames Iowa.
17. Sepaskhah, A. R. and A. Tafteh. 2011. Pedotransfer function for estimation of soil-specific surface area using soil fractal dimension of improved particle-size distribution. *Archives of Agronomy and Soil Science* 1-11.
18. StatSoft, Inc. 2010. STATISTICA (data analysis software system), version 10. [www.statsoft.com](http://www.statsoft.com).
19. Su, Y. Z., H. L. Zhao, W. Z. Zhao. and T. H. Zhang. 2004. Fractal features of soil particle size distribution and the implication for indicating desertification. *Geoderma* 122: 43-49.
20. Tyler, S.W. and S.W. Wheatcraft. 1992. Fractal scaling of soil particle size distributions: analysis and limitations. *Soil Sci. Soc. Am. J.* 56: 362-369.
21. Wang, X., M. H. Li, S. Liu. and G. Liu. 2006. Fractal characteristics of soils under different land-use patterns in the arid and semiarid regions of the Tibetan Plateau, China. *Geoderma* 134: 56-61.
22. Zachman, D.W., P.C. Chauteau. and A. Klute. 1981. The calibration of the Richards flow equation for a draining column by the parameter identification. *Soil Sci. Soc. Am. J.* 45:1012-1015.
23. Zolfaghari, A.A. and M.A. Hajabbasi. 2008. Effect of different land use treatments on soil structural quality and relations with fractal dimensions. *Soil Sci. Soc. Am. J.* 3: 101-108